市民講座数学

－バナッハ・タルスキーの定理－
金塊を２倍にする方法

合同教育研究全道集会　資料

成田收*

２００３年１１月７－９日

*数教協会員　北海道札幌啓成高校

目 次

1　バナッハ・タルスキーの定理

1.1　バナッハ・タルスキーの定理とは

バナッハ・タルスキーの定理とは、「ある大きさの球を、有限個にうまく分割し、形を変えずに組み直すと、同じ大きさの２つの球に組み直すことができる」というものです。　砂田利一氏の「バナッハ・タルスキーのパラドックス」という著書によれば、正確には、「大きさの異なる２つの球体ＫとＬを考える。このとき、Ｋを適当に有限個に分割し、それらを同じ形のまま適当な方法で寄せ集めることによって、Ｌを作ることができる。」ということになります。

ずいぶん、不思議なことがあるものです。この定理が正しければ、金塊を自由に２倍に増やすことができるではないか、と疑いたくなります。しかしこの定理は、実際の物質についての定理ではありません。数学でいう点集合からなる球体についての定理です。　それにしても、体積が２倍に増えるなんてとんでもないということになりますが、それも、今ひとつ、言葉を慎重に使う必要があります。　体積というものを、私たちが日常感じるものに近いものとするためには、分割して寄せ集めても、体積は変わらないものとする必要があります。　すると、この定理は、「体積を考えることができない有限な空間図形が存在する。」ということを意味していると考えられます。いったいこれはどういうことなのでしょう。

1.2　バナッハとタルスキー

この不思議な定理を証明したのは、1900 年代のはじめに活躍したポーランドの数学者、バナッハ（Stefan Banach 1892-1945) とタルスキー (Alfred Tarski 1902-1983) です。バナッハとタルスキーは 1924 年にこの定理を証明しました。
ポーランドの数学の系譜は独特です。その様子は、志賀浩二氏の「無限からの光芒」に詳しく書かれていますが、ポーランドの復興を願う民族的自覚の芽生えとともに興った数学における文化的自立の機運がシェルピンスキ、バナッハ、ウラム、タルスキなどの数学者を排出しました。ポーランド学派と呼ばれる彼らの数学は無限への挑戦を正面から扱う独特のものであったといいます。そのポーランド学派の数学の中で生まれたのがバナッハ・タルスキーの定理です。

2　定理をささえる２つの世界

2.1　無限の世界

2.1.1　無限を数える
－個数が等しいとはどういうことか－

　球体を有限個に分解して形を変えずに組み直すと、もとの球体と同じ大きさの球体２つぶんに隙間なく組み直すことができる、という、バナッハ・タルスキーの定理をささえる２つの不思議な世界があります。
その一つは、無限の世界です。無限の世界で、個数が等しいとはどういうことかを考えて行くと不思議なことに出会います。そのことを、突き詰めると、無限の中にも違いがあることがわかります。

　人がものの個数を数えるのは、そのものの個数を

$$\{1, 2, 3, \cdots\}$$

という自然数の集合との間で、一つずつ引き合わせていく行為です。
それは、

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

と数えるものの間に $1:1$ の対応を作り、

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

の一部である

$$\mathbf{W_n} = \{1, 2, 3, \cdots n\}$$

と等しいときはそのものの個数は n 個である、というように数えます。
これは有限個の場合です。

しかし、数えようとするものが無限このもののときは、次のようなことが起こります。
いま、

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

と

$$\mathbf{2N} = \{2, 4, 6, \cdots\}$$

を考えます。

$$1 \leftrightarrow 2$$
$$2 \leftrightarrow 4$$
$$\cdots$$

すなわち、

$$x \leftrightarrow 2x$$

とすると、

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

と

$$\mathbf{2N} = \{2, 4, 6, \cdots\}$$

は 1 : 1 に対応しますから、個数は等しいと考えられます。したがって、

$$\mathbf{N} \supset \mathbf{2N}$$

であるにもかかわらず、$\mathbf{N}$ と $\mathbf{2N}$ の個数は等しいと考えられます。
つまり、自分自身と自分の一部が 1 : 1 に対応し、同じ”個数”と考えられます。
集合の要素の個数が無限になったとたんに、日常の常識とは異なることが起こってしまいます。

　ところで、このように $\mathbf{N}$ と 1 : 1 に対応する無限の個数を、数えることができる無限という意味で、可算無限個といいます。

　そうすると、正の有理数全体（正の分数全体）も可算無限個であることが次のようにしてわかります。
正の有理数全体は m と n が共通の約数のない正の整数であるとき、

$$\frac{n}{m}$$

であらわされるもの全体と考えることができます。これらの数を次のようにして並べて行きます。

$$1\ ,\ \frac{1}{2}, \frac{2}{1}\ ,\ \frac{1}{3}, \frac{3}{1}\ ,\ \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}\ ,\ \cdots$$

すなわち、分母と分子を足して 1 のもの、 2 のもの、3 のもの $\cdots$ の順に並べ、分母と分子を足して同じ数になるものの中では小さいものから順に並べていきます。そうすると、これらの数は、 1 列に並びますから、初めの方から順に $\mathbf{N}$ の $\{1, 2, 3, \cdots\}$ に対応させていけば、1 : 1 に対応するすることになります。

　もっというと、可算無限個の集合は何個集めても（可算無限個集めても）可算無限個を越えることはありません。
そのことを示すには、$\mathbf{N}$ を可算無限個並べておいて、それらを、

$$\mathbf{N_1}, \mathbf{N_2}, \mathbf{N_3}, \cdots$$

としておきます。

$$
\begin{array}{llllllllllllllllll}
\mathbf{N_1}: & 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 & , & 7 & , & 8 & , & \cdots \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & & & & \\
\mathbf{N_2}: & 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 & , & 7 & , & 8 & , & \cdots \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & & & & & & \\
\mathbf{N_3}: & 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 & , & 7 & , & 8 & , & \cdots \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & & & & & & & & \\
\mathbf{N_4}: & 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 & , & 7 & , & 8 & , & \cdots \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & & & & & & & & & & & \\
\mathbf{N_5}: & 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 & , & 7 & , & 8 & , & \cdots \\
 & & \nearrow & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

このように、順に右斜め上にすすみ、一番上の行に来たら次の行の一番左に移動し、また右斜め上にすすむことを繰り返していくと、**N** を可算無限個並べたものと、**N** 自身が 1 : 1 に対応することになります。
可算無限個は可算無限個集めてもやはり可算無限個です。

2.1.2　可算無限個より大きい無限

　では、これ以上の無限はないのでしょうか。
カントール[1]は $[0,1]$ の間の数直線上にある実数全体は可算無限個を越えるということを巧妙な方法で示しました。
その方法を対角線論法といいます。
対角線論法とは次のようなものです。

　もし、$[0,1]$ の間の数直線上にある実数全体が可算無限個だとしたら、$\mathbf{N}$ と $1:1$ に対応することになりますから、順番に並べることができます（大きさの順とは限りません)。

　それらは、$[0,1]$ の間の数ですから、

$$0.\cdots$$

という小数であらわされることになります。
それを、

$$0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}\cdots$$

とあらわすことにします。
a_{ij} は 0 から 9 までの整数です。
これを、順番に並べて、

$$\begin{array}{c}
0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}\cdots \\
0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{16}\cdots \\
0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\cdots \\
0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\cdots \\
0.a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}\cdots \\
\cdots
\end{array}$$

　これで、すべてが並んだものとします。

　この対角線成分に着目して、新しい数をつくろうというわけです。
最初に、

$$0.a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}a_{66}\cdots$$

という数を考えます。
次に

$$0.b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}b_{55}b_{66}\cdots$$

[1]Georg Cantor 1845-1918 ドイツの数学者　集合論の創始者といわれている

という数をつくるのですが、そのとき、

$$a_{11} \neq b_{11}, a_{22} \neq b_{22}, \cdots$$

とします。
すると、この、

$$0.b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}b_{55}b_{66}\cdots$$

は n 桁目の b_{nn} が、n 番目の数

$$0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}a_{n5}a_{n6}\cdots a_{nn}\cdots$$

の n 桁目の

$$a_{nn}$$

のところが異なります。
したがって、すべての数と、異なることになります。

　しかも、$[0,1]$ の間の数です。

　結局、$[0,1]$ の間の数を順に 1 番目、 2 番目、$\cdots$、と並べることができたというのは誤りであることがわかります。

　つまり、$[0,1]$ の間の数直線上にある実数全体が可算無限個だということは誤りであり、$[0,1]$ の間の数直線上にある実数全体は、可算無限より大きい無限であることがわかります。

　無限の中にも大きさの違いがあることがわかってきました。このことは、有限の場合の個数という概念では少し間に合わなくなってきていることを示します。したがって、無限の大きさの違いも表現できる様に、集合の濃度という言葉を新しく決めます。有限の場合には個数自身が濃度です。

　可算無限の濃度を

$$\aleph_0$$

とあらわします。

　$[0,1]$ の間の数直線上にある実数全体の濃度を連続体濃度といい、

$$\aleph_1$$

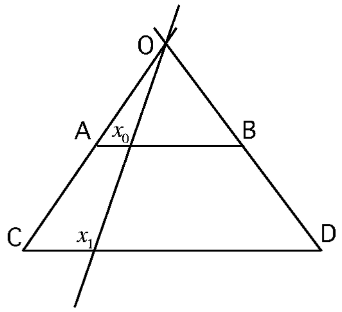
であらわします。

　また、1 : 1 に対応する集合は同じ濃度であると約束します。すると、この濃度は限りなく大きいものが存在します。[2]

[2]ある集合 A とその部分集合全体の集合 2^A の間には 1 : 1 の対応が存在しません。この理由はきちんと議論しなければならないことです。

2.1.3　連続体濃度と可算無限

　このように定義すると、1 と異なる長さの数直線も濃度が $\aleph_1$ 等しいことがわかります。
それは、1 の長さの線分 AB と 2 の長さの線分 CD を平行に並べておき、直線 AC と直線 BD の交点を O とすると、線分 AB 上の点 x_0 と BD 上の点 x_1 は $1:1$ に対応する



ことになります。

　したがってどのような長さの線分も点集合として濃度が等しいことになります。

　さらに、1×1 の大きさの正方形の中にある点の濃度も $\aleph_1$ であることが次のようにしてわかります。

　1×1 の大きさの正方形の中にある点は座標

$$(r_x, r_y)$$

であらわされますが、r_x , r_y は

$$0 \leqq r_x \leqq 1\ ,\ 0 \leqq r_y \leqq 1$$

となる実数ですから、

$$r_x = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\cdots$$

,

$$r_y = \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\cdots$$

と小数であらわされます。
この 2 つの実数から、

$$r = 0.\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\alpha_4\beta_4\cdots$$

をつくると、r は長さ 1 の線分上の点をあらわしていますから、1×1 の大きさの正方形の中にある点は長さ 1 の線分上の点と $1:1$ に対応していることになり、1×1 の大きさの正方形の中にある点の濃度は $\aleph_1$ であることがわかります。

同様に、球面上の点の集合の濃度も $\aleph_1$ であることになります。

つまり、球面上の点から、可算無限個の点の集合を何回取り出しても取り出した点の集合は可算無限個 $\aleph_0$ にしかなりませんから、それよりは $\aleph_1$ の方がずっと大きい無限ですから、点はいくらでも残っていることになります。
このことが、バナッハ・タルスキーの定理の証明で必要になります。

2.2 空間の回転の非可換性の世界

2.2.1 非可換性の問題

バナッハタルスキーの定理の不思議さを生み出すもう一つの原因はある操作の非可換性にあるようです。非可換の世界が最も簡単に見え始める自由群の世界をのぞいてみましょう。

文字 a, a', b, b' でできるすべての単語の集合 G を考えます。ただし、綴りの中に文字 $aa', a'a, bb', b'b$ があれば、それは簡約してなかったものとしてできる、短い綴りの単語と同じものと考えます。
例えば、単語 $abb'a$ は aa と同じ語と考えます。

また、単語 $ababb'a' = aba(bb')a' = abaa' = ab(aa') = ab$ となると考えます。簡約が済んだ単語のことを、既約な単語といいます。
この、a' のことを a^{-1}、b' のことを b^{-1} と書くのが普通です。また、単語をつなげることを、語の積と考えます。
すると、

1．どの単語の積もすべて G に入る。

2．G の単語 x, y, z を持ってきて、$(xy)z$ を作るのも、$x(yz)$ を作るのも同じことになる。(結合法則が成立するといいます)

3．G の中には aa^{-1} と同じように、空な単語あり、この単語を ϕ であらわすと、G のどんな単語 x にたいしても、$x\phi = \phi x = x$ となり、相手を変化させない。(このような要素を単位元と呼びます。)

4．G のどんな単語 x にたいしても、x を作っている文字をすべて逆順にして、a は a^{-1} で a^{-1} は a で置き換え、b は b^{-1} で b^{-1} は b で置き換えた単語 y を作ると、$xy = yx = \phi$ となります。
例えば、$x = abba^{-1}b$ に対しては、$y = b^{-1}ab^{-1}b^{-1}a^{-1}$ をつくると、$xy = (abba^{-1}b)(b^{-1}ab^{1-}b^{-1}a^{-1}) = abba^{-1}(bb^{-1})ab^{-1}b^{-1}a^{-1} = abba^{-1}\phi ab^{-1}b^{-1}a^{-1} = \cdots = \phi$ となる。
(この y を x^{-1} と書き、x の逆元といいます。)

と、いうことが起こります。
この４つの性質を持つ集合を群といいますが、この G は群になります。
この群では、xy と yx は一般には異なる要素（単語）になるため、積が交換可能でないという意味で、非可換群とよばれます。
また、どこまでも長い単語ができあがりますので、G は無限の要素を含む群になります。
この群 G のことを文字 a, b で生成される自由群とよび、自由群 $G =< a, b >$ とあらわします。

2.2.2 自由群 $G =< a, b >$ の不思議

この自由群 $G =< a, b >$ を先頭の文字で分類すると、
a で始まる単語、
a^{-1} で始まる単語、
b で始まる単語、と
b^{-1} で始まる単語に分類されます。
このほかに、空な単語 ϕ があります。
a で始まる単語の類を

$$W(a)$$

等であらわすと、

$$G = \{\phi\} \cup W(a) \cup W(a^{-1}) \cup W(b) \cup W(b^{-1})$$

しかも、

$$\{\phi\}, W(a), W(a^{-1}), W(b), W(b^{-1})$$

は、共通な要素を持ちません。

ところで、

$$aW(a^{-1})$$

という語の集まりを考えます。
これは、$W(a^{-1})$ の中の単語に左側から a を付け加えた単語すべてを集めたものという意味です。
このとき、

$$aW(a^{-1})$$

の単語と

$$W(a^{-1})$$

の単語は 1 対 1 に対応しています。
にもかかわらず、

$$aW(a^{-1})$$

の中には、
a^{-1} で始まる単語がすべて含まれています。また、b で始まる単語も、b^{-1} で始まる単語もすべて含まれています。

そのほかに、$W(a^{-1})$ の単語として、a^{-1} 1 文字からなる単語も含まれていますから、$aW(a^{-1})$ のなかには、$aa^{-1} = \phi$ も含まれています。
したがって、共通な要素がない $W(a)$ と $aW(a^{-1})$ で

$$G = W(a) \cup aW(a^{-1})$$

とあらわされます。

　$W(a^{-1})$ と $aW(a^{-1})$ の単語は 1 対 1 に対応していますから、このことは、ほぼ、$W(a)$ と $W(a^{-1})$ で G ができあっがたようにも考えられます。

また、共通な要素がない $W(b)$ と $bW(b^{-1})$ で

$$G = W(b) \cup bW(b^{-1})$$

とあらわされます。

　$W(b^{-1})$ と $bW(b^{-1})$ の単語は 1 対 1 に対応していますから、このことは、ほぼ、$W(b)$ と $W(b^{-1})$ で G ができあがったようにも考えられます。

　さらに、

$W(a)$ と $W(a^{-1})$ と $W(b)$ と $W(b^{-1})$ に $\{\phi\}$

をあわせてはじめて

$$G$$

ができあがるのですから、不思議な感じがします。

　これは、有限個の要素でできている集合では決してあり得ないことです。

2.2.3　空間内の回転全体が作る群

原点を中心とする球面を S^2（球面なので、２次元的だという意味で S^2 と書き表します）であらわすことにします。ここで、原点を中心とする回転を考えると、球面内の点はまた、球面内の点に移されます。原点を中心とする回転のすべてを考え、その集合を、$SO(3)$ であらわします。この $SO(3)$ は回転を続けて行うことを、回転の積と考えると、この積に関して群になります。すなわち、回転の積はまた $SO(3)$ の回転となります。この積は結合法則を満たします。$SO(3)$ の中に球面を S^2 の点を全く移動しない回転、回転をしない回転を単位元と考えます。また、逆回転を、逆元と考えます。これで、群になるための条件はすべてそろいました。

2.2.4　空間内の回転の非可換性

x 軸を中心にした θ 角回転を α とします。
同様に、
z 軸を中心にした θ 角回転を β
いま、仮に、$\theta = 90^\circ$ としてみます。このとき、α を行ってから、β を行う回転 $\beta\alpha$ と β を行ってから、α を行う回転 $\alpha\beta$ とでは、結果が全くちがってしまいます。なぜなら、これらの回転で x 軸上の点 $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が移動する先を考えてみると、$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるため、$\beta\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ですが、
$\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるため、$\alpha\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり、
回転 $\alpha\beta$ と回転 $\alpha\beta$ とでは、x 軸上の点 $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が移動する先が全くちがってしまいます。
他の点も同様で、回転 $\alpha\beta$ と回転 $\alpha\beta$ とでは、全くちがう回転であることがわかります。

2.2.5 空間内の２種類の回転が作る群

x 軸を中心にした θ 角回転を α とします。
同様に、
x 軸を中心にした $-\theta$ 角回転を α^{-1}
z 軸を中心にした θ 角回転を β
z 軸を中心にした $-\theta$ 角回転を β^{-1} とします。
このとき、これらの回転の組み合わせでおこるすべての回転でできる集合を $H =< \alpha, \beta >$ とあらわすことにします。
この回転の集合は、α と β を続けて行うことを、α と β の積と考えて、後ろの方から順に α, β と書いて、$\beta\alpha$ とあらわすこととすると、群になります。
すなわち、H の中の要素を２つとってその積を考えると、これも α と β の回転の組み合わせなので、また、H の要素となります。

さらに、この積は結合法則を満たすことは明らかです。
H の中に球面を S^2 の点を全く移動しない回転があります。この、回転をしない回転を単位元 e と考えます。
また、逆回転を、逆元と考えます。
これで、H は群になりますが、集合として、H は $SO(3)$ の一部ですから、H は $SO(3)$ の部分群になるということになります。
この角度 θ をうまくとると（具体的には正四面体の二つの面がなす角、すなわち $\cos\theta = \dfrac{1}{3}, \sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, などとすると）$H$ は a と b が生成する自由群 $G =< a, b >$ と同じものになります。このことは、別に証明する必要のあることです。（連続講座１のテーマとします。）

このことを認めると、$H =< \alpha, \beta >$ は次の性質を持つ群になります。
いま、
回転をしない回転、すなわち単位元 e からなる集合を $\{e\}$
α で始まる要素からなる集合を $H(\alpha)$
α^{-1} で始まる要素からなる集合を $H(\alpha^{-1})$
β で始まる要素からなる集合を $H(\beta)$
β^{-1} で始まる要素からなる集合を $H(\beta^{-1})$ とします。
すると、これら５つの集合は共通の要素を含みません。
しかも、$H(\alpha^{-1})\alpha$ には、α^{-1} で始まる回転がすべて含まれています。また、β, β^{-1} で始まる回転もすべて含まれています。その他に $\{e\}$ も含まれているため、

$H =< \alpha, \beta >$ は

$$H = \{e\} \cup H(\alpha) \cup H(\alpha^{-1}) \cup H(\beta) \cup H(\beta^{-1})$$

となり、

$$H = H(\alpha) \cup H(\alpha^{-1})\alpha$$

となります。
同様に、

$$H = H(\beta) \cup H(\beta^{-1})\beta$$

ですから、

H は共通の要素を含まない

$$\{e\}, H(\alpha), H(\alpha^{-1}), H(\beta), H(\beta^{-1})$$

で

$$H = \{e\} \cup H(\alpha) \cup H(\alpha^{-1}) \cup H(\beta) \cup H(\beta^{-1})$$

であり、

$$H = H(\alpha) \cup H(\alpha^{-1})\alpha$$

でもあり、

$$H = H(\beta) \cup H(\beta^{-1})\beta$$

でもあるということが起こります。
すなわち、一部の部分集合が全体をおおうといった感じがする、不思議な性質を持つことになります。

3　定理の証明

3.1　証明方法のあらすじ

定理の証明方法のあらすじは次のようなものです。
球面 S^2 の点を、次のように共通部分を持たない 4 つの部分集合に分けます。
すなわち、

$$S^2 = P \cup Q \cup U \cup V$$

となるようにします。
　さらに、その上で、集合 P, Q, U, V を回転や平行移動したものも、おなじ記号 P, Q, U, V で表すことにして、
S^2 が $P \cup Q$ と合同[3]かつ S^2 が $U \cup V$ と合同という性質を持つように作ることができたなら、証明はほとんど完成です。
　次は、球の中心と、P の点を結ぶ線分の集合でできる図形から原点を除いたものを作りそれを P'、
Q の点と原点を結ぶ線分の集合でできる図形から原点を除いたものを Q'
とし、
おなじように、U', V' をつくります。

S^2 から原点を除いたものを K' とすれば、疑似球体

$$K'$$

は

$$K' = P' \cup Q' \cup U' \cup V'$$

となり、P', Q', U', V' は共通部分を持ちません。

さらに、
K' と $P' \cup Q'$ は合同かつ
K' と $U' \cup V'$ は合同となり、
１つの球体が１点を除いて２つの同じ大きさの球体と合同になります。
さらに、厳密にいえば、この１点をきちんと、扱えば、証明は完全なものになります。

[3]形が同じ、ピッタリと重ねることができることを合同と言うことにします。

3.2 代表元の集合の構成

いま、自由群 $H=<\alpha,\beta>$ の要素 h は球面 S^2 に回転の連続運動を引き起こし、球面 S^2 の点 x を球面 S^2 の点 hx に移します。このとき、自由群 $H=<\alpha,\beta>$ の要素 h は球面 S^2 に作用し、球面 S^2 の点 x を球面 S^2 の点 hx に変換するといいます。

H のすべての要素を $\{h_1,h_2,h_3,h_4,\cdots\}$ とあらわすとき、球面 S^2 の点 x にたいして H のすべての要素を作用させて得られる集合 $\{h_1x,h_2x,h_3x,h_4x,\cdots\}$ を記号 Hx であらわすことにします。
このとき、S^2 から x_1 を選び、
$Hx_1=\{h_1x_1,h_2x_1,h_3x_1,h_4x_1,\cdots\}$ を作り、
S^2 から Hx_1 を除いた集合 S^2-Hx_1 を作り、
この中から x_2 を選び、
$Hx_2=\{h_1x_2,h_2x_2,h_3x_2,h_4x_2,\cdots\}$ を作ります。
すると、この、Hx_1 と Hx_2 には共通の要素は含まれません。
なぜなら、
もしも、Hx_1 と Hx_2 に共通の要素があったとして、それを、x とあらわすと、H の要素 g があって $x=gx_1$ とあらわされ、同時に、H の要素 h があって $x=hx_2$ と表されます。
すると、$gx_1=hx_2$ となりますから、h の逆回転 h^{-1} をつかって、$h^{-1}gx_1=x_2$ となります。$h^{-1}g$ も回転 $\alpha,\alpha^{-1},\beta,\beta^{-1}$ を続けたものですから、H の要素です。
したがって、x_2 が Hx_1 の要素となり、x_2 のとりかたに反します。
つまり、Hx_1 と Hx_2 には共通の要素が含まれないことがわかります。

さらに、このようにしてできた、Hx_2 をつかって、
S^2-Hx_1 から Hx_2 を除いた集合 $S^2-Hx_1-Hx_2$ を作り、
この中から x_3 を選び、
$Hx_3=\{h_1x_3,h_2x_3,h_3x_3,h_4x_3,\cdots\}$ を作り、$\cdots$ とどこまでも続けていく様なことを考えます。
このとき、上と同じ理由で、$Hx_1,Hx_2,Hx_3,Hx_4,\cdots$ たちには、共通の要素は含まれません。

さて、このような操作でできると考えられる、$Hx_1,Hx_2,Hx_3,Hx_4,\cdots$ ですが、このことは、$Hx_1,Hx_2,Hx_3,Hx_4,\cdots$ と $1,2,3,\cdots$ と数え上げてできるようなことではありません（可算無限個ではない、連続体濃度を持つ）。しかし、S^2 の要素の中で、例えば、x と y が H の要素 h をとって $hx=y$ となるとき、すなわち $Hx=\{h_1x,h_2x,h_3x,h_4x,\cdots\}\ni y$ のとき、x と y は同値ということにすれば、これは、一般に同値関係といわれる関係になります。

そうすると、S^2 のすべての要素は互いに交わりを持たない同値なものどうしの集ま

り $X, X', X'', \cdots$ に分類されます。
このとき、$S^2 = X \cup X' \cup X'' \cup \cdots$ となります。この一つ一つの $X, X', X'', \cdots$ は $Hx, Hx', Hx'', \cdots$ ですから、 これらから、代表元 $x, x', x'', \cdots$ をとることができます。この代表元の集合を $M = \{x, x', x'', \cdots\}$ とします[4]。

この、「図形」M がバナッハタルスキーの定理で球を分割し、形を変えずに 2 倍の球に組み直されるときの「素粒子」にあたります。この「素粒子」を使って、$S^2 = \bigcup_{h \in H} hM$ とあらわすことができます。

[4] この無限個の操作を保障しているのが、選択公理です。
選択公理「集合 X が空でない部分集合の族に分割されているとする。このとき、各部分集合から一つずつ要素を選び出して、それらを集めることにより一つの集合を作ることができる。」

3.3 球面を回転の種類で分類

このとき、さらに、H を
$\{e\}$ と $H(\alpha)$，$H(\alpha^{-1})$，$H(\beta)$，$H(\beta^{-1})$ に分け、
$H(\alpha)$ の要素を $a_1, a_2, \cdots$
$H(\alpha^{-1})$ の要素を $a'_1, a'_2, \cdots$
$H(\beta)$ の要素を $b_1, b_2, \cdots$
$H(\beta^{-1})$ の要素を $b'_1, b'_2, \cdots$
とあらわすことにすると、

S^2 から x_1 を選び、それに、H を作用させてできた集合は
$Hx_1 = \{h_1x_1, h_2x_1, h_3x_1, h_4x_1, \cdots\}$ は、
$Hx_1 = \{x_1, a_1x_1, a_2x_1, \cdots, a'_1x_1, a'_2x_1, \cdots, b_1x_1, b_2x_1, \cdots, b'_1x_1, b'_2x_1, \cdots\}$ とあらわされます。

S^2 から Hx_1 を除いた集合 $S^2 - Hx_1$ から x_2 を選び、それに、H を作用させてできた集合は
$Hx_2 = \{x_2, a_1x_2, a_2x_2, \cdots, a'_1x_2, a'_2x_2, \cdots, b_1x_2, b_2x_2, \cdots, b'_1x_2, b'_2x_2, \cdots\}$ とあらわされます。
$H(\alpha) = A$
$H(\alpha^{-1}) = A'$
$H(\beta) = B$
$H(\beta^{-1}) = B'$
とあらわし、

$$AM = H(\alpha)M = \bigcup_{a \in H(\alpha)} aM \qquad A'M = H(\alpha^{-1})M = \bigcup_{a' \in H(\alpha^{-1})} a'M$$

$$BM = H(\beta)M = \bigcup_{b \in H(\beta)} bM \qquad B'M = H(\beta^{-1})M = \bigcup_{b' \in H(\beta^{-1})} b'M$$

と書いて
$Hx_1, Hx_2, Hx_3, \cdots$ を並べてみます。

$$\begin{array}{llllll}
Hx_1 = \{ & \overbrace{x_1}^{M}, & \overbrace{a_1x_1, a_2x_1, \cdots}^{H(\alpha)M}, & \overbrace{a'_1x_1, a'_2x_1, \cdots}^{H(\alpha^{-1})M}, & \overbrace{b_1x_1, b_2x_1, \cdots}^{H(\beta)M}, & \overbrace{b'_1x_1, b'_2x_1, \cdots}^{H(\beta^{-1})M} \} \\
Hx_2 = \{ & x_2, & a_1x_2, a_2x_2, \cdots & , a'_1x_2, a'_2x_2, \cdots & , b_1x_2, b_2x_2, \cdots & , b'_1x_2, b'_2x_2, \cdots \} \\
Hx_3 = \{ & x_3, & a_1x_3, a_2x_3, \cdots & , a'_1x_3, a'_2x_3, \cdots & , b_1x_3, b_2x_3, \cdots & , b'_1x_3, b'_2x_3, \cdots \} \\
Hx_4 = \{ & x_4, & a_1x_4, a_2x_4, \cdots & , a'_1x_4, a'_2x_4, \cdots & , b_1x_4, b_2x_4, \cdots & , b'_1x_4, b'_2x_4, \cdots \} \\
Hx_5 = \{ & x_5, & a_1x_5, a_2x_5, \cdots & , a'_1x_5, a'_2x_5, \cdots & , b_1x_5, b_2x_5, \cdots & , b'_1x_5, b'_2x_5, \cdots \} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot
\end{array}$$

実際にはこのように数え上げることができないほど S^2 の点は多いため、(連続体濃度 $\aleph_1$) 上のように記述することはできませんが、視覚的に理解するために便宜的にこのようにあらわすことにします。[5]

すると、

$S^2 = M \cup H(\alpha)M \cup H(\alpha^{-1})M \cup H(\beta)M \cup H(\beta^{-1})M$

とあらわされます。

[5] $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ を記号 M で表してあります。これも、可算無限個ではないので $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ のように書くことはできませんが無理にもこのようにあらわしてあります。

3.4　分割に重なりがないようにする技術

　ところで、定理の証明のためには、これらの、
$M, H(\alpha)M, H(\alpha^{-1})M, H(\beta)M, H(\beta^{-1})M$
に重なりがないこと、すなわち、共通の点がないことが大切な条件になります。
このことは、H の任意の要素 p, q に対して、
$p \neq q$ ならば、pM と qM のあいだに共通の点がなければよいのですが、その条件を数学の記号で書くと、
$p \neq q$ ならば、$pM \cap qM = \phi$ という条件を満たすというように書かれます。
このことが、何を表すのか明らかにしてみましょう。
いま、$pM \cap qM \neq \phi$ とするとどんなことが起こるでしょう。
pM と qM の共通部分が空ではないということですから、
ある要素が pM と qM の両方に含まれることを意味します。
その要素を x とすると、x は pM に入っていることから、$x = px_i$ という形をしています。
同様に、x は qM にも入っていることから、$x = qx_j$ という形でもあらわされます。
すなわち、
$px_i = qx_j$
p，q が $H =< \alpha, \beta >$ の要素である回転を表すことから、
p，q の逆回転 p^{-1}，q^{-1} も H の回転です。
したがって、$p^{-1}q \in H$ ですから、$p^{-1}q = h$ とあらわすと、
$x_i = p^{-1}qx_j = hx_j \in Hx_j$
Hx_j に入っている $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ の要素は x_j だけですから[6]、
$x_i = x_j$ となります。
したがって、
$px_i = qx_j$ から
$px_i = qx_i$
すなわち、
$x_i = p^{-1}qx_i$
となります。
つまり、回転 $p^{-1}q$ は球面 S^2 の点 x_i を動かしません。
このようなことが起こるのは、
回転 $p^{-1}q$ が、実は、全ての点を動かさない回転 e である場合か、または、x_i が回転 $p^{-1}q$ の回転軸上の点である場合かのいずれかです。
　しかし、第 1 の場合である、回転 $p^{-1}q$ が、実は、全ての点を動かさない回転 e である場合は、$p^{-1}q = e$ となり、左から回転 p を作用させると $q = p$ となるため、今の場合、$p \neq q$ のとき、pM と qM のあいだに共通の点があるかどうかを検討するという最初の前提条件を満たさないことになるので、この場合は考えなくても良いことになりま

[6] $Hx_1, Hx2, Hx_3, \cdots, Hx_j, \cdots$ の代表元の集合を $M = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ としたのですから、Hx_1 に含まれる M の要素は x_1,Hx_2 に含まれる M の要素は x_2,$\cdots$,Hx_j に含まれる M の要素は x_j です。

す。

　第２の場合である、x_i が回転 $p^{-1}q$ の回転軸上の点である場合は、問題は深刻です。せっかく、分解した、$S^2 = \bigcup_{h \in H} hM$ の hM に点の重なりがあるのではこの後の議論の進めようがありません。

したがって、今は、いったん、これらの、回転の軸にぶつかるために回転で移動することがない点を、特殊な点として考察の対象から外してしまいます（後から考えます）。

このとき、H に含まれる回転はどの回転も（全く回転移動を行わない e 以外は）全ての点を動かします。このことを、H は球面 S^2 から回転軸にあたる点を除いた空間に自由に作用するといいます。

すなわち、$H =< \alpha, \beta >$ に含まれる全ての回転の回転軸にあたる点を D とします。そうして、球面全体を S^2 とするとき、

自由群 $H =< \alpha, \beta >$ は、空間 $S^2 - D$ に自由に作用することになります。

　ところで、$H =< \alpha, \beta >$ は可算無限個からなる集合ですから、その回転軸にあたる点の数も可算無限個です。一方、球面 S^2 は連続体濃度を持ちますから、$S^2 - D$ も連続体濃度を持ちます。

したがって、$S^2 - D$ と球の中心を結ぶ線分の集合から中心を除いた立体（疑似球体）を考えて、ここで、有限個に分割したものを形を変えずに移動してうまく組み合わせ、同じ疑似球体を２個作ることに成功すれば、あとは、可算無限個の点 D と球の中心を結ぶ線分から中心を除いた立体と中心の扱いのみが残ります。

3.5 証明の核

ここでは、S^2 の疑似空間 $S^2 - D$ に対して、バナッハ・タルスキーの定理の証明の核になる部分を証明します。

$S^2 - D$ は共通の要素を持たない hM が寄せ集められてできていると考えられます。
すなわち、

$S^2 - D = \bigcup_{h \in H} hM$,　$(h \neq g$ のとき、$hM \cap gM = \phi)$

となります。

$H(\alpha) = A$
$H(\alpha^{-1}) = A'$
$H(\beta) = B$
$H(\beta^{-1}) = B'$
とあらわし、

$$AM = H(\alpha)M = \bigcup_{a \in H(\alpha)} aM \qquad A'M = H(\alpha^{-1})M = \bigcup_{a' \in H(\alpha^{-1})} a'M$$
$$BM = H(\beta)M = \bigcup_{b \in H(\beta)} bM \qquad B'M = H(\beta^{-1})M = \bigcup_{b' \in H(\beta^{-1})} b'M$$

と書いて
$Hx_1, Hx_2, Hx_3, \cdots$ を並べてみます。

$$\begin{aligned}
Hx_1 &= \{ \overbrace{x_1}^{M}, \overbrace{a_1x_1, a_2x_1, \cdots}^{H(\alpha)M}, \overbrace{a'_1x_1, a'_2x_1, \cdots}^{H(\alpha^{-1})M}, \overbrace{b_1x_1, b_2x_1, \cdots}^{H(\beta)M}, \overbrace{b'_1x_1, b'_2x_1, \cdots}^{H(\beta^{-1})M} \} \\
Hx_2 &= \{ x_2, a_1x_2, a_2x_2, \cdots, a'_1x_2, a'_2x_2, \cdots, b_1x_2, b_2x_2, \cdots, b'_1x_2, b'_2x_2, \cdots \} \\
Hx_3 &= \{ x_3, a_1x_3, a_2x_3, \cdots, a'_1x_3, a'_2x_3, \cdots, b_1x_3, b_2x_3, \cdots, b'_1x_3, b'_2x_3, \cdots \} \\
Hx_4 &= \{ x_4, a_1x_4, a_2x_4, \cdots, a'_1x_4, a'_2x_4, \cdots, b_1x_4, b_2x_4, \cdots, b'_1x_4, b'_2x_4, \cdots \} \\
Hx_5 &= \{ x_5, a_1x_5, a_2x_5, \cdots, a'_1x_5, a'_2x_5, \cdots, b_1x_5, b_2x_5, \cdots, b'_1x_5, b'_2x_5, \cdots \} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned}$$

すなわち、

$$M = \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{array} \right\} = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$$

$$\bigcup_{a\in H(\alpha)} aM = \left\{ \begin{array}{ccc} a_1x_1 & a_2x_1 & \cdots \\ a_1x_2 & a_2x_2 & \cdots \\ a_1x_3 & a_2x_3 & \cdots \\ & \vdots & \end{array} \right\} \qquad \bigcup_{a'\in H(\alpha^{-1})} a'M = \left\{ \begin{array}{ccc} a_1'x_1 & a_2'x_1 & \cdots \\ a_1'x_2 & a_2'x_2 & \cdots \\ a_1'x_3 & a_2'x_3 & \cdots \\ & \vdots & \end{array} \right\}$$

$$\bigcup_{b\in H(\beta)} bM = \left\{ \begin{array}{ccc} b_1x_1 & b_2x_1 & \cdots \\ b_1x_2 & b_2x_2 & \cdots \\ b_1x_3 & b_2x_3 & \cdots \\ & \vdots & \end{array} \right\} \qquad \bigcup_{b'\in H(\beta^{-1})} b'M = \left\{ \begin{array}{ccc} b_1'x_1 & b_2'x_1 & \cdots \\ b_1'x_2 & b_2'x_2 & \cdots \\ b_1'x_3 & b_2'x_3 & \cdots \\ & \vdots & \end{array} \right\}$$

となります。
ここでも、$\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ は実際には可算無限個ではないので、正確にはこのように書くことはできませんが、だいたいの感じをつかむためにこのような記述の仕方を使いました。

ところで、M を α 回転させたものを $\alpha(M) = M'$ とします。
すなわち、$M' = \alpha(M) = \{\alpha(x_1), \alpha(x_2), \alpha(x_3), \cdots\}$ です。
M' は M を x 軸中心に θ だけ回転させたものですから、図形として同じ形をしています（合同です）。
ここで、M' に $H(\alpha^{-1})$ の回転を作用させたもの全ての集合を $H(\alpha^{-1})M'$ で表します。
すなわち、$H(\alpha^{-1})$ の要素を、$\alpha^{-1}, h\alpha^{-1}, h'\alpha^{-1}, h''\alpha^{-1}, h'''\alpha^{-1}, \cdots$ と表すと、$H(\alpha^{-1})M'$ の要素は、$\alpha^{-1}\alpha(x_1), h\alpha^{-1}\alpha(x_2), h'\alpha^{-1}\alpha(x_3), \cdots$ と表わされます。

$H(\alpha^{-1})M' = \{hx_1, h'x_2, h''x_3, h'''x_4, \cdots\}$
です。
$h\alpha^{-1}, h'\alpha^{-1}, h''\alpha^{-1}, h'''\alpha^{-1}, \cdots \in H(\alpha^{-1})$ なので、
$h, h', h'', h''', \cdots$ などには右端に α があることはありません。しかし、それ以外の全ての可能性を持っています。つまり、$h, h', h'', h''', \cdots$ は、α 以外の回転で始まるすべての回転を含んでいることになります。
つまり、
$\{h, h', h'', h''', \cdots\} = \{e\} \cup H(\alpha^{-1}) \cup H(\beta)H(\beta^{-1})$ ということになります。
このことに注意して、$H(\alpha^{-1})M'$ をあらわすと、

$$\begin{aligned} H(\alpha^{-1})M' &= H(\alpha^{-1})\alpha(M) \\ &= \bigcup_{h\alpha^{-1}\in H(\alpha^{-1})} h\alpha^{-1}\alpha M \\ &= \bigcup_{h\alpha^{-1}\in H(\alpha^{-1})} hM \\ &= \{hx_1, h'x_2, h''x_3, h'''x_4, \cdots\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{h\in\{e\}\cup H(\alpha^{-1})\cup H(\beta)H(\beta^{-1})} hM \\
&= eM \cup \bigcup_{h\in H(\alpha^{-1})} hM \cup \bigcup_{h\in H(\beta)} hM \cup \bigcup_{h\in H(\beta^{-1})} hM \\
&= M \cup \bigcup_{a'\in H(\alpha^{-1})} a'M \cup \bigcup_{b\in H(\beta)} bM \cup \bigcup_{b'\in H(\beta^{-1})} b'M \\
&= M \cup A'M \cup BM \cup B'M
\end{aligned}
$$

ところで、
M' は M を α 回転しただけのものですから、形は同じ（合同）です。したがって、
　$A'M = H(\alpha^{-1})M$ と $H(\alpha^{-1})M'$ は合同です。
このことを、$H(\alpha^{-1})M \equiv H(\alpha^{-1})M'$ と表すことにします。$H(\alpha^{-1})M' = M \cup A'M \cup BM \cup B'M$ ですから、$A'M = H(\alpha)M$ と $A'M' = H(\alpha^{-1})M' = M \cup A'M \cup BM \cup B'M$ は合同、すなわち、$A'M$ と $M \cup A'M \cup BM \cup B'M$ は合同です。したがって、$A'M \equiv M \cup A'M \cup BM \cup B'M$ と表すことができます。
すなわち、

$$
\begin{aligned}
S^2 - D &= M \cup AM \cup A'M \cup BM \cup B'M \\
&= AM \cup (M \cup A'M \cup BM \cup B'M) \\
&= AM \cup A'M' \\
&\equiv AM \cup A'M
\end{aligned}
$$

となります。
　同様に、M を β 回転させたものを $\beta(M) = M''$ とします。

$$
\begin{aligned}
H(\beta^{-1})M'' &= H(\beta^{-1})\beta(M) \\
&= H(\beta^{-1})\beta M \\
&= M \cup H(\alpha)M \cup H(\alpha^{-1})M \cup H(\beta^{-1})M \\
&= M \cup AM \cup A'M \cup B'M
\end{aligned}
$$

　したがって、

$$
\begin{aligned}
S^2 - D &= M \cup AM \cup A'M \cup BM \cup B'M \\
&= BM \cup (M \cup AM \cup A'M \cup B'M) \\
&= BM \cup B'M'' \\
&\equiv BM \cup B'M
\end{aligned}
$$

となります。

　$M \cup AM \cup A'M \cup BM \cup B'M \equiv BM \cup B'M$
すなわち、全体が、その一部と合同であるという不思議なことが起こっています。

　ここまでわかったことをまとめると、
共通部分を持たない図形 $M, AM, A'M\ BM, B'M$ で
$S^2 - D = M \cup AM \cup A'M \cup BM \cup B'M$
$S^2 - D \equiv AM \cup A'M$
$S^2 - D \equiv BM \cup B'M$
したがって、
$M \cup AM \cup A'M \cup BM \cup B'M \equiv AM \cup A'M \equiv BM \cup B'M$
すなわち、球は、M を除いて２つに分割してうまく回転して組み直すと、AM と $A'M$ だけで同じ大きさの球が一つでき、BM と $B'M$ でもう一つの球ができるため、２倍になっておつりがくることになります。

3.6　回転の軸 D の扱い

自由群 $H =< \alpha, \beta >$ の各要素が球面 S^2 に自由に作用しない点として持つ回転の軸にあたる点の集合 D の扱い方について考えましょう。　D はうまく数えると、$1, 2, 3, \cdots$ と数えることができる集合です。この D に適当な $SO(3)$ の回転 g を選び、$D = g^0D, g(D) = gD, g(g(D)) = g^2D, g^3D, \cdots$ が共通の要素を持たないようにすることができます。

このとき、$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} g^nD$ とします。すると、$gX = X - D$ となります。また、g は回転なので X と $gX = X - D$ は合同です。（自分自身がその部分集合とある回転で一致し、合同となるというのは有限集合では考えられません、不思議な話です。）さて、集合 D の扱いですが、
$S^2 = (S^2 - X) \cup X$
ここで、X と $gX = X - D$ は合同なので、
S^2 は、$(S^2 - X) \cup (X - D)$ と合同、
$(S^2 - X) \cup (X - D) = S^2 - D$ なので、
S^2 と $S^2 - D$ は合同となります。

$SO(3)$ の回転 g を選び、$D = g^0D, g(D) = gD, g(g(D)) = g^2D, g^3D, \cdots$ が共通の要素を持たないようにする方法について考えます。D が可算個からなる集合ですから、D が S^2 を埋め尽くすことはありません。そこで、D と重ならない回転軸を持った $SO(3)$ の回転 g を一つ選びます。S^2 の中心 O を通って g の回転軸に垂直な平面を考え、D の点からこの平面に垂線を描き、その垂線の足の集合を D' とします。D' からかってに 2 点 P', Q' を持ってきて角 $\angle P'OQ'$ を作り、その角の $\dfrac{1}{n}$ や、それらの角度と $360° \times \dfrac{l}{m}$　$(l, m;$ は整数$)$ 異なる角度をすべて考えます。これらの角すべての集合を Θ とすると、この集合は高々可算個からなる集合なので、この集合に含まれない角度 θ を一つ選ぶことがでます。このとき、θ 角の回転を g とすることによって、$D = g^0D, g(D) = gD, g(g(D)) = g^2D, g^3D, \cdots$ が共通の要素を持たないようになります。

なぜなら、g^mD と g^nD に共通の要素があったとすると、$g^mP = g^nQ$ となる点が存在することになります。いま $m > n$ とすると、$g^{m-n}P = Q$ となります。このとき、$\theta \times (m - n) = \angle P'OQ' + 360° \times l$ となり、$\theta = \angle P'OQ' \times \dfrac{1}{m-n} + 360° \times \dfrac{l}{m-n}$ となるため、θ のとりかたに矛盾します。

4　証明の完成へ向けて残った問題 1　$H = < \alpha, \beta >$ が自由群であることの証明

4.1　空間の点の移動を扱う準備

直方体 ABCDEFGH を点 A を原点 O に合わせて辺 AB を x 軸、辺 AD を y 軸、辺 AE を z 軸に合わせます。このとき、点 G の座標が (x_1, y_1, z_1) であるとします。

この座標を縦書きにして、G $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ と表すことにします。

ところで、点 O $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ から点 G $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ へ移動するためには
x 軸方向に x_1
y 軸方向に y_1
z 軸方向に z_1
だけ移動すれば良いわけですが、この移動を
$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ と表すことにします。点 G の記号と移動 $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ の記号が一緒ですが、これは、点 O から、移動 $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を行うと、点 G にやってくると考え、一緒の記号を使います。

また、x 軸方向に x_1 移動することを $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y 軸方向に y_1、z 軸方向に z_1 移動することを、それぞれ
$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$ とあらわすことにします。
移動を続けて行うことを、移動の足し算で表すと、
$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ ということになります。
また、移動の性質から、一般に、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix}$$

と、対応する方向への移動量どうしを足せばよいことが分かります。さらに、移動量の定数倍を考えると、

$$k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}$$

と考えるのが自然なので、このように約束します。

このとき、

$\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると、

$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1\overrightarrow{e}_1$

となるので、

$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$

$= \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = x_1\overrightarrow{e}_1 + y_1\overrightarrow{e}_2 + z_1\overrightarrow{e}_3$ となります。

つまり、$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CG}}$ です。

4.2 回転移動

直方体 ABCDEFGH を点 O を中心として回転 α を行った結果、
点 A,B,C,D,E,F,G,H がそれぞれ、点 A',B',C',D',E',F',G',H' に移動したとします。
$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CG}}$ でしたから、回転 α を行っても、$\overrightarrow{\mathrm{OG'}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}} + \overrightarrow{\mathrm{B'C'}} + \overrightarrow{\mathrm{C'G'}}$ であることにかわりはありません。

この回転 α で、$\overrightarrow{e}_1$ が $\overrightarrow{e_1}'$ に、$\overrightarrow{e}_2$ が $\overrightarrow{e_2}'$ に、$\overrightarrow{e}_3$ が $\overrightarrow{e_3}'$ になったとすると、$\overrightarrow{\mathrm{OG'}} = x_1\overrightarrow{e}'_1 + y_1\overrightarrow{e_2}' + z_1\overrightarrow{e_3}'$ となります。

$$\overrightarrow{e_1}' = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{e_2}' = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{e_3}' = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$ であったとすると、

回転 α を行うと、次のように変わることになります。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

したがって、

$$\overrightarrow{\mathrm{OG'}} = x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + y_1\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + z_1\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ a_{31}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}y_1 \\ a_{22}y_1 \\ a_{32}y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13}z_1 \\ a_{23}z_1 \\ a_{33}z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 \end{pmatrix}$$

となります。

この、最後の、

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 \end{pmatrix}$$

を、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$ と書きあらわすことにして、

行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ をベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ にかけると、ベクトル $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 \end{pmatrix}$
になったと考えます。

すなわち、行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ をかけることは、回転の作用をあらわし、

ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 \end{pmatrix}$ は、点の位置をあらわしていること
になります。
いいかえると、点G $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ は回転 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ で点 $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 \end{pmatrix}$
に移ることになります。
このことを、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 \end{pmatrix}$$

と書きあらわします。

4.3 連続回転移動

ここで α, β の回転を連続して行うとどうなるかを調べます。いま、α を

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

とする回転、

β を

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

とする回転とします。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ にたいして、α, β の順に回転することを、$\beta\alpha\overrightarrow{p}$ とあらわすことにします。

$$\alpha\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

となりますが、

ここで、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

とおくと、上の式は、

$\alpha\overrightarrow{p} = A\overrightarrow{p}$

とあらわされます。

このAを回転 α をあらわす行列と呼ぶことにします。

すると、回転 β をあらわす行列は

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ となります。

ここで、$\overrightarrow{q} = \alpha\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\overrightarrow{q} = \alpha\overrightarrow{p} = A\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned}$$ となりますから、

$$\beta\alpha\overrightarrow{p} = \beta(\alpha\overrightarrow{p}) = B(A\overrightarrow{p}) = B\overrightarrow{q} = B\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z' \\ b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z' \\ b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + b_{12}(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) + b_{13}(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) \\ b_{21}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + b_{22}(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) + b_{23}(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) \\ b_{31}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + b_{32}(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) + b_{33}(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (b_{11}a_{11}x + b_{11}a_{12}y + b_{11}a_{13}z) + (b_{12}a_{21}x + b_{12}a_{22}y + b_{12}a_{23}z) + (b_{13}a_{31}x + b_{13}a_{32}y + b_{13}a_{33}z) \\ (b_{21}a_{11}x + b_{21}a_{12}y + b_{21}a_{13}z) + (b_{22}a_{21}x + b_{22}a_{22}y + b_{22}a_{23}z) + (b_{23}a_{31}x + b_{23}a_{32}y + b_{23}a_{33}z) \\ (b_{31}a_{11}x + b_{31}a_{12}y + b_{31}a_{13}z) + (b_{32}a_{21}x + b_{32}a_{22}y + b_{32}a_{23}z) + (b_{33}a_{31}x + b_{33}a_{32}y + b_{33}a_{33}z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (b_{11}a_{11}x + b_{12}a_{21}x + b_{13}a_{31}x) + (b_{11}a_{12}y + b_{12}a_{22}y + b_{13}a_{32}y) + (b_{11}a_{13}z + b_{12}a_{23}z + b_{13}a_{33}z) \\ (b_{21}a_{11}x + b_{22}a_{21}x + b_{23}a_{31}x) + (b_{21}a_{12}y + b_{22}a_{22}y + b_{23}a_{32}y) + (b_{21}a_{13}z + b_{22}a_{23}z + b_{23}a_{33}z) \\ (b_{31}a_{11}x + b_{32}a_{21}x + b_{33}a_{31}x) + (b_{31}a_{12}y + b_{32}a_{22}y + b_{33}a_{32}y) + (b_{31}a_{13}z + b_{32}a_{23}z + b_{33}a_{33}z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32})y + (b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33})z \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31})x + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32})y + (b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33})z \\ (b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31})x + (b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32})y + (b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33})z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} + b_{23}a_{33} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となります。

これは、$\beta(\alpha\overrightarrow{p}) = B(A\overrightarrow{p})$ でしたから、この最後にあらわれた、行列を B と A の積 BA と約束すると、$\beta(\alpha\overrightarrow{p}) = B(A\overrightarrow{p}) = (BA)\overrightarrow{p}$ とあらわされたことになります。

結局、いくつかの回転を連続して行った結果、ある点がどこへ移動したかを知るためには、まず、

1．それらの回転が $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ をどんなベクトルに変換するかを知ることで、その回転の行列を知ること、

2．回転を連続して行った結果を知るためには、それらの行列の積を計算し、その点の異動先を知ることができることがわかりました。

4.4 回転 α, β の行列表現

α を x 軸を中心とした θ 回転とし、θ は $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ であるような角とします[7]。すると、

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}, \alpha\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$$ ですから、

$$\alpha\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$= x\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\alpha\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1x\\0x\\0x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0y\\(\cos\theta)y\\(\sin\theta)y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0z\\(-\sin\theta)z\\(\cos\theta)z\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1x & + & 0y & + & 0z\\0x & + & (\cos\theta)y & + & (-\sin\theta)z\\0x & + & (\sin\theta)y & + & (\cos\theta)z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\theta & -\sin\theta\\0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$ すなわち、

$$\alpha = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\theta & -\sin\theta\\0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

であることがわかります。

ここで、$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ ですから、$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ となり、このとき、

$$\alpha = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3}\\0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

となります。

同様に、β を z 軸を中心とした θ 回転とすると、

$$\beta\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}, \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\\0\end{pmatrix}, \beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ ですから、

[7] 正四面体の二つの面のなす角はこの角です。

$$\beta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$、$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ の値を具体的に書き入れると、

$$\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。

また、x 軸を中心として $-\theta$ 回転すると、α の逆回転ですから、これを、α^{-1} と書き表します[8]。

この、α^{-1} は

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ 0 & \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

であることがわかります。

同様に、

$$\beta^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。

[8] α の逆元と呼ばれます。

4.5　$H =< \alpha, \beta >$ は自由群か

u を H の要素とします。
u は $\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}$ のいくつかを順にかけてできた列で、
そのなかに、$\alpha\alpha^{-1}$ や $\alpha^{-1}\alpha$、$\beta\beta^{-1}$ や $\beta^{-1}\beta$ があれば、それを 1 で置き換えて計算を済ましたもの（既約なもの）とします。

v も同様な H の要素で u とは $\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}$ の並び方が異なるものとします。

この並び方がわずかでも異なるときそれらは全て異なる要素であるとき、すなわち、この並び方がわずかでも異なれば、けっして同じものにならないとき、 H は自由群になります。

ところで、もしこれらのなかに同じものがあったとします。
すると、
$u = x_1 x_2 \cdots x_m$　,　$v = y_1 y_2 \cdots y_n$ で、
$x_1, x_2, y_1, y_2, \cdots$ は $\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}$ のいずれか、
というようにあらわすことができます。

$$u = v$$

ならば、

$$x_1 x_2 \cdots x_m = y_1 y_2 \cdots y_n$$

ですが、
この両辺に、左から $y_1^{-1}, y_2^{-1}, \cdots, y_{n-1}^{-1}, y_n^{-1}$ を順にかけてゆくと、

$$y_n^{-1} y_{n-1}^{-1} \cdots y_2^{-1} y_1^{-1} x_1 x_2 \cdots x_m = 1$$

となります。

したがって、H が自由群であることを示すためには、H のなかの既約な要素はけっして 1 に等しくならないことを示せばよいことになります。
1 は全ての点をもとどおりの点に動かす回転、すなわち、回転しない回転をあらわします。

4.6 $H=<\alpha,\beta>$ が自由群であることの証明のあらすじ

β は z 軸を中心とした θ 回転でしたから、β は z 軸上の点を動かしません。しかし、球面 S^2 の点で、$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 以外はすべて移動します。ですから、最初に、β または、β^{-1} で z 軸を中心とした θ または、$-\theta$ 回転をするときは、上の点とは異なる点、例えば、点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ などに注目して、その後、簡約を受けない順で $\alpha,\alpha^{-1},\beta,\beta^{-1}$ のどの回転を受けても、点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に戻ることがないことを示せばよいことになります。

したがって、$u=x_1x_2\cdots x_m\beta^{\pm 1}$

$x_1,x_2,\cdots,x_m$ は $\alpha,\alpha^{-1},\beta,\beta^{-1}$ のいずれかであるとき、

$u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を示せばよいことになります。

ところで、ためしに、いくつかの例を具体的に計算してみると、この計算はたいへん特殊な計算であることがわかります。

$$\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 1-(2\sqrt{2})^2 \\ 2\sqrt{2}+2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} -7 \\ 4\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta^{-1}\beta^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\beta^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 1-(2\sqrt{2})^2 \\ -2\sqrt{2}-2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} -7 \\ -4\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

同様に、

$$\beta^3=\begin{pmatrix} -\left(\frac{23}{27}\right) & \frac{10\sqrt{2}}{27} & 0 \\ \frac{-10\sqrt{2}}{27} & -\left(\frac{23}{27}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ですから、

$$\beta^3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\left(\frac{23}{27}\right) & \frac{10\sqrt{2}}{27} & 0 \\ \frac{-10\sqrt{2}}{27} & -\left(\frac{23}{27}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{3^3}\begin{pmatrix} -23 \\ 10\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となります。

また、

$$\alpha\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{8}{9} & \frac{2\sqrt{2}}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2\sqrt{2} \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\beta^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{-2\sqrt{2}}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{-8}{9} & \frac{2\sqrt{2}}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 3 \\ -2\sqrt{2} \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^{-1}\beta^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{-2\sqrt{2}}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{8}{9} & \frac{-2\sqrt{2}}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 3 \\ -2\sqrt{2} \\ 8 \end{pmatrix}$$

などとなります。

このように、点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は、最初に $\beta^{\pm1}$ 回転をすれば、さらに $\alpha^{\pm1}$ 回転や $\beta^{\pm1}$ 回転をしても、$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に戻ってこないばかりか、

回転の回数を k として、行き着く先を、$\frac{1}{3^k}\begin{pmatrix} l \\ m' \\ n \end{pmatrix}$ とすると、

l は整数、
m' は 3 の倍数でない整数 m と $\sqrt{2}$ のかけ算、
n も整数
であるという特徴を持つ点に移ることがわかります。
つまり、$\dfrac{1}{3^k}\begin{pmatrix} l \\ m\sqrt{2} \\ n \end{pmatrix}$ で、l は整数、m は 3 の倍数でない整数、n も整数である点に移ることがわかります。

ここで、どんな場合にも、この m が 3 の倍数でない数であることを実際に示すことができれば、0 も 3 の倍数ですから、m が 0 でないことを示すことができることになり、結局、点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は、最初に $\beta^{\pm 1}$ 回転をすれば、さらに $\alpha^{\pm 1}$ 回転や $\beta^{\pm 1}$ 転をしても、決して $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に戻ってこないことを示すことができます。
このとき、$\beta^{\pm 1}$ 回転ではじまる回転は決して単位元になることはできず、結局、$\alpha^{\pm 1}$ 回転と $\beta^{\pm 1}$ 回転の順番が異なる回転は回転として、まったく異なるものであることがわかります。
すなわち、$H =< \alpha, \beta >$ が自由群になることがわかります。

4.7　証明

実際に証明をします。
最初の回転は β であるとします。

$x_1, x_2, x_3, \cdots$ は $\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$ のいずれかを表すものとします。

$x_{k-1}x_{k-2}\cdots x_2x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3^{k-1}}\begin{pmatrix}l\\m\sqrt{2}\\n\end{pmatrix}$ とあらわすとき、

l は整数、m は 3 の倍数でない整数、n も整数となります。

また、$x_kx_{k-1}x_{k-2}\cdots x_2x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3^{k}}\begin{pmatrix}l'\\m'\sqrt{2}\\n'\end{pmatrix}$ とあらわすとき、

l' は整数、m' は 3 の倍数でない整数、n' も整数となります。
これらのことは、$k=2$ のときは正しいことは、上で見てきました。

この、x_k について、

(1) x_k が $\alpha^{\pm1}$ にひとしいとき

(2) x_k が $\beta^{\pm1}$ にひとしいとき

に分けて考えると、

(1) x_k が $\alpha^{\pm1}$ にひとしいとき

$\alpha^{\pm1}x_{k-1}x_{k-2}\cdots x_2x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3^{k}}\begin{pmatrix}l'\\m'\sqrt{2}\\n'\end{pmatrix}$ で

$x_{k-1}x_{k-2}\cdots x_2x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3^{k-1}}\begin{pmatrix}l\\m\sqrt{2}\\n\end{pmatrix}$ であったとすると、

一般に、

$$\alpha^{\pm1}\begin{pmatrix}l\\m\sqrt{2}\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\dfrac{1}{3}&\dfrac{\mp2\sqrt{2}}{3}\\0&\dfrac{\pm2\sqrt{2}}{3}&\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l\\m\sqrt{2}\\n\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&\mp2\sqrt{2}\\0&\pm2\sqrt{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l\\m\sqrt{2}\\n\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3l\\(m\mp2n)\sqrt{2}\\\pm4m+n\end{pmatrix}$$ なので、

$$
\alpha^{\pm 1} x_{k-1} x_{k-2} \cdots x_2 x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha^{\pm 1} \frac{1}{3^{k-1}} \begin{pmatrix} l \\ m\sqrt{2} \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{k-1}} \alpha^{\pm 1} \begin{pmatrix} l \\ m\sqrt{2} \\ n \end{pmatrix}
$$

$$
= \quad \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} 3l \\ (m \mp 2n)\sqrt{2} \\ \pm 4m + n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} l' \\ m'\sqrt{2} \\ n' \end{pmatrix}
$$

したがって、$l' = 3l, m' = m \mp 2n, n' = \pm 4m + n$ であることがわかります。

(2) x_k が $\beta^{\pm 1}$ にひとしいとき

$\beta^{\pm 1} x_{k-1} x_{k-2} \cdots x_2 x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} l' \\ m'\sqrt{2} \\ n' \end{pmatrix}$ で

$x_{k-1} x_{k-2} \cdots x_2 x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{k-1}} \begin{pmatrix} l \\ m\sqrt{2} \\ n \end{pmatrix}$ であったとすると、

一般に、

$$
\beta^{\pm 1} \begin{pmatrix} l \\ m\sqrt{2} \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m\sqrt{2} \\ n \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \mp 2\sqrt{2} & 0 \\ \pm 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m\sqrt{2} \\ n \end{pmatrix}
$$

$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} l \mp 4m \\ (\pm 2l + m)\sqrt{2} \\ 3n \end{pmatrix}$ なので、

$$
\beta^{\pm 1} x_{k-1} x_{k-2} \cdots x_2 x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta^{\pm 1} \frac{1}{3^{k-1}} \begin{pmatrix} l \\ m\sqrt{2} \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{k-1}} \beta^{\pm 1} \begin{pmatrix} l \\ m\sqrt{2} \\ n \end{pmatrix}
$$

$$
= \quad \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} l \mp 4m \\ (\pm 2l + m)\sqrt{2} \\ 3n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} l' \\ m'\sqrt{2} \\ n' \end{pmatrix}
$$

したがって、$l' = l \mp 4m, m' = \pm 2l + m, n' = 3n$ となります。

つぎに、$x_{k+1} x_k x_{k-1} x_{k-2} \cdots x_2 x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{k+1}} \begin{pmatrix} L \\ M\sqrt{2} \\ N \end{pmatrix}$ とあらわし、

x_{k+1} が $\alpha^{\pm1}$ のときと、$\beta^{\pm1}$ のときに分けて考えます。

(a) x_{k+1} が $\alpha^{\pm1}$ のとき
これを、さらに、x_k が $\alpha^{\pm1}$ のときと x_k が $\beta^{\pm1}$ のときに分けて考えます。

(i) x_k が $\alpha^{\pm1}$ のとき

$$
\begin{aligned}
& x_{k+1}x_kx_{k-1}x_{k-2}\cdots x_2x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha^{\pm1}\alpha^{\pm1}x_{k-1}x_{k-2}\cdots x_2x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\
= \quad & \alpha^{\pm1}\alpha^{\pm1}\frac{1}{3^{k-1}}\begin{pmatrix}l\\m\sqrt{2}\\n\end{pmatrix} = \frac{1}{3^{k-1}}\alpha^{\pm1}\left\{\alpha^{\pm1}\begin{pmatrix}l\\m\sqrt{2}\\n\end{pmatrix}\right\} \\
= \quad & \frac{1}{3^{k-1}}\alpha\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}l'\\m'\sqrt{2}\\n'\end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{3^k}\alpha\begin{pmatrix}l'\\m'\sqrt{2}\\n'\end{pmatrix} \\
= \quad & \frac{1}{3^k}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}l'\\(m'\mp 2n')\sqrt{2}\\\pm4m'+n'\end{pmatrix} = \frac{1}{3^{k+1}}\begin{pmatrix}l'\\(m'\mp 2n')\sqrt{2}\\\pm4m'+n'\end{pmatrix} \\
= \quad & \frac{1}{3^{k+1}}\begin{pmatrix}L\\M\sqrt{2}\\N\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって、
$x_k = \alpha^{\pm1}$ のときなので、
$l' = 3l, m' = m \mp 2n, n' = \pm4m + n$ ですから、

$$
\begin{aligned}
M &= m' \mp 2n' = (m \mp 2n) \mp 2(\pm4m + n) \\
&= -7m \mp 4n = -7m \pm 14n \mp 18n \\
&= -7(m \mp 2n) - 18n = -7m' \mp 18n
\end{aligned}
$$

となり、$18n$ は 3 の倍数、m' は 3 の倍数でない整数となり、M が 3 の倍数ではなく、0 ではありえないことがわかります。

(ii) x_k が $\beta^{\pm 1}$ のとき

$$x_{k+1}x_kx_{k-1}x_{k-2}\cdots x_2x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\alpha^{\pm 1}\beta^{\pm 1}x_{k-1}x_{k-2}\cdots x_2x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{\pm 1}\beta^{\pm 1}\frac{1}{3^{k-1}}\begin{pmatrix}l\\m\sqrt{2}\\n\end{pmatrix}=\frac{1}{3^{k-1}}\alpha^{\pm 1}\left\{\beta^{\pm 1}\begin{pmatrix}l\\m\sqrt{2}\\n\end{pmatrix}\right\}\\
&= \frac{1}{3^{k-1}}\alpha^{\pm 1}\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}l'\\m'\sqrt{2}\\n'\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{3^k}\alpha^{\pm 1}\begin{pmatrix}l'\\m'\sqrt{2}\\n'\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3^k}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}l'\\(m'\mp 2n')\sqrt{2}\\\pm 4m'+n'\end{pmatrix}=\frac{1}{3^{k+1}}\begin{pmatrix}l'\\(m'\mp 2n')\sqrt{2}\\\pm 4m'+n'\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3^{k+1}}\begin{pmatrix}L\\M\sqrt{2}\\N\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

したがって、
$x_k=\beta^{\pm 1}$ のときなので、
$l'=l\mp 4m, m'=\pm 2l+m, n'=3n$ ですから、

$$\begin{aligned}
M &= m'\mp 2n'=m'\mp 2(3n)\\
&= m'\mp 6n
\end{aligned}$$

となり、$6n$ は 3 の倍数、m' は 3 の倍数でない整数となり、M が 3 の倍数ではなく、0 ではありえないことがわかります。

(iii) x_k が $\beta^{\mp 1}$ のとき
(ii) のときと同様で、
$x_k=\beta^{\mp 1}$ のときなので、
$l'=l\pm 4m, m'=\mp 2l+m, n'=3n$ ですから、

$$\begin{aligned}
M &= m'\pm 2n'=m'\pm 2(3n)\\
&= m'\pm 6n
\end{aligned}$$

となり、$6n$ は 3 の倍数、m' は 3 の倍数でない整数となり、M が 3 の倍数ではなく、0 ではありえないことがわかります。

(b) x_{k+1} が $\beta^{\pm 1}$ のときこれを、さらに、x_k が $\alpha^{\pm 1}$ のときと x_k が $\beta^{\pm 1}$ のときに分けて考えます。

(i) x_k が $\alpha^{\pm 1}$ のとき

$$
\begin{aligned}
&x_{k+1}x_kx_{k-1}x_{k-2}\cdots x_2x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\beta^{\pm 1}\alpha^{\pm 1}x_{k-1}x_{k-2}\cdots x_2x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\
=\ &\beta^{\pm 1}\alpha^{\pm 1}\frac{1}{3^{k-1}}\begin{pmatrix}l\\m\sqrt{2}\\n\end{pmatrix}=\frac{1}{3^{k-1}}\beta^{\pm 1}\left\{\alpha^{\pm 1}\begin{pmatrix}l\\m\sqrt{2}\\n\end{pmatrix}\right\}\\
=\ &\frac{1}{3^{k-1}}\beta^{\pm 1}\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}l'\\m'\sqrt{2}\\n'\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{3^{k}}\beta^{\pm 1}\begin{pmatrix}l'\\m'\sqrt{2}\\n'\end{pmatrix}\\
=\ &\frac{1}{3^{k}}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}l'\mp 4m'\\(\pm 2l'+m')\sqrt{2}\\3n'\end{pmatrix}=\frac{1}{3^{k+1}}\begin{pmatrix}l'\mp 4m'\\(\pm 2l'+m')\sqrt{2}\\3n'\end{pmatrix}\\
=\ &\frac{1}{3^{k+1}}\begin{pmatrix}L\\M\sqrt{2}\\N\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって、
$x_k=\alpha^{\pm 1}$ のときなので、
$l'=3l, m'=m\mp 2n, n'=\pm 4m+n$ ですから、

$$
\begin{aligned}
M &= \pm 2l'+m'=\pm 2(3l)+m'\\
&= \pm 6l+m'
\end{aligned}
$$

となり、$6l$ は 3 の倍数、m' は 3 の倍数でない整数となり、M が 3 の倍数ではなく、0 ではありえないことがわかります。

(ii) x_k が $\alpha^{\mp 1}$ のとき (i) と同様にして、
$x_k=\alpha^{\mp 1}$ のときなので、
$l'=3l, m'=m\pm 2n, n'=\mp 4m+n$ ですから、

$$
\begin{aligned}
M &= \pm 2l'+m'=\pm 2(3l)+m'\\
&= \pm 6l+m'
\end{aligned}
$$

となり、$6l$ は 3 の倍数、m' は 3 の倍数でない整数となり、M が 3 の倍数ではなく、0 ではありえないことがわかります。

(iii) x_k が $\beta^{\pm 1}$ のとき

$$
\begin{aligned}
& x_{k+1}x_kx_{k-1}x_{k-2}\cdots x_2x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \beta^{\pm 1}\beta^{\pm 1}x_{k-1}x_{k-2}\cdots x_2x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\
= \;& \beta^{\pm 1}\beta^{\pm 1}\frac{1}{3^{k-1}}\begin{pmatrix}l\\m\sqrt{2}\\n\end{pmatrix} = \frac{1}{3^{k-1}}\beta^{\pm 1}\left\{\beta^{\pm 1}\begin{pmatrix}l\\m\sqrt{2}\\n\end{pmatrix}\right\} \\
= \;& \frac{1}{3^{k-1}}\beta^{\pm 1}\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}l'\\m'\sqrt{2}\\n'\end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{3^k}\beta^{\pm 1}\begin{pmatrix}l'\\m'\sqrt{2}\\n'\end{pmatrix} \\
= \;& \frac{1}{3^k}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}l'\mp 4m'\\(\pm 2l'+m')\sqrt{2}\\3n'\end{pmatrix} = \frac{1}{3^{k+1}}\begin{pmatrix}l'\mp 4m'\\(\pm 2l'+m')\sqrt{2}\\3n'\end{pmatrix} \\
= \;& \frac{1}{3^{k+1}}\begin{pmatrix}L\\M\sqrt{2}\\N\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって、
$x_k = \beta$ のときなので、
$l' = l \mp 4m, m' = \pm 2l + m, n' = 3n$ ですから、

$$
\begin{aligned}
M &= \pm 2l' + m' = \pm 2(l \mp 4m) + (\pm 2l + m) \\
&= \pm 4l - 7m = \pm 4l + 2m - 9m \\
&= 2(\pm 2l + m) - 9m = 2m' - 9m
\end{aligned}
$$

となり、$9m$ は 3 の倍数、m' は 3 の倍数でない整数となり、M が 3 の倍数ではなく、0 ではありえないことがわかります。

証明の結論

このように、2つ続いた、α や β の回転に対して、$\frac{1}{3^{k-1}}\begin{pmatrix} l \\ m\sqrt{2} \\ n \end{pmatrix}$ や、$\frac{1}{3^k}\begin{pmatrix} l' \\ m'\sqrt{2} \\ n' \end{pmatrix}$ の m や m' が3の倍数でないとき、次の $\frac{1}{3^{k+1}}\begin{pmatrix} L \\ M\sqrt{2} \\ N \end{pmatrix}$ の M も3の倍数ではなく、したがって、0ではないことがわかりました。ところで、最初の2個に関しては、前節で、$\frac{1}{3^{k-1}}\begin{pmatrix} l \\ m\sqrt{2} \\ n \end{pmatrix}$ や、$\frac{1}{3^k}\begin{pmatrix} l' \\ m'\sqrt{2} \\ n' \end{pmatrix}$ の m や m' が3の倍数でないことはわかっていますから、3個目の α や β の回転に対して M は0でないことがわかります。すると、2個目と3個目について続いて m や m' が3の倍数でないことがわかりますから、4個目の回転に対しても、M は0にならないことがわかるというように、どこまでもこの論理が続いて、いつまでたっても、M は0になりません。したがって、$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は最初に β 回転で動いてしまえば、いつまでたっても、$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ にもどることはないことがわかります。
このことによって、$H=<\alpha,\beta>$ は自由群であることが証明されました。

5　証明の完成へ向けて残った問題２

5.1　証明の気になる部分

$S^2 - D$
$= M \cup AM \cup A'M \cup BM \cup B'M = AM \cup A'M$
$= BM \cup B'M$
となったところで、見てみると、球を２つに分けるというには、M があまってしまうのが気になります。このことを解決して、ぴったり二つに分けるには、少し工夫が必要です。このことを解決することを考えます。

5.2　分割合同の概念

いま、集合 P が集合 Q と H の作用で移りあうとき
P と Q は H 合同であるといい、

$$P \equiv_H Q$$

と表すことにします。

また、直接 P と Q が合同でなくとも、P と Q の分割どうしが合同な時も「合同」の概念に入れておくために、こういうときは、分割合同であるということにします。
すなわち、
P, Q が交わりのない集合で
$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \cdots \cup P_n$ かつ $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup \cdots \cup Q_n$ であって、

$$P_i \equiv_H Q_i$$

がすべての i についていえたら、
集合 P と Q は分割合同です。
記号は

$$P \approx_H Q$$

を使うことにします。

いま、集合 P が集合 Q の部分集合と分割合同であることを、

$$P \ll_H Q$$

とあらわすことにします。

このとき、次の著しい性質が成り立ちます。
すなわち、

『　$P \ll_H Q$ かつ $Q \ll_H P$ であるとき、$P \approx_H Q$ である　』

ことを示すことができます。

本当にこのことが成立するかどうかは、この後、5.4 節で問題にします。

5.3　球がちょうど２個分になることの証明の概略

　このこと、すなわち、
『　$P \ll_H Q$ かつ $Q \ll_H P$ であるとき、$P \approx_H Q$ である　』
と、いうことを認めると、
球面が２つ分の同じ大きさの球面と合同になることが次のようにしてわかります。

　3.6 で、$(S^2 - D) \approx_H S^2$ が示されました。
また、3.5 でえられた $S^2 - D = M \cup AM \cup A'M \cup BM \cup B'M$ で、
$P = AM \cup A'M \quad Q = BM \cup B'M$
とあらわすことにすると。
$A'M \equiv_H A\alpha M'$
$B'M \equiv_H B\beta M'$
なので、
$S^2 \approx_H M \cup P \cup Q \approx_H P \approx_H Q$ かつ P, Q, M は交わりを持たない
と、いうことが示されたことになります。
このことは、
S^2 の部分集合 P, Q で $P \cap Q = \phi$ かつ $S^2 \approx_H P \approx_H Q$ となるものが存在するというように言い換えることができます。
このとき、
$S^2 \approx_H Q \subset (S^2 - P)$ なので $S^2 \ll_H (S^2 - P)$
当然 $(S^2 - P) \subset S^2$ なので $(S^2 - P) \ll_H S^2$
$S^2 \ll_H (S^2 - P)$ かつ $(S^2 - P) \ll_H S^2$ より

$$(S^2 - P) \approx_H S^2$$

ここで、あらためて $(S^2 - P) = Q$ とおけば、

　$S^2 = P \cup Q$ かつ $P \cap Q = \phi$ で $S^2 \approx_H P \approx_H Q$
と、なるものが存在することになります。

　これで、ぴったり球面が２つ分の同じ大きさの球面と合同になることがしめされました。

5.4　$P \ll_H Q$ かつ $Q \ll_H P$ ならば $P \approx_H Q$ の証明

　では、『　$P \ll_H Q$ かつ $Q \ll_H P$ であるとき、$P \approx_H Q$ であること』
を示すことにします。
そのために、3点にわたって少し準備をします。

　準備 1

　$P \approx_H Q$ であるとき P と Q のあいだには 1:1 の対応があることを示します。
　この対応を φ であらわし、
　P の要素 x に Q の要素 y が対応することを、

$$\varphi(x) = y$$

あるいは、

$$\varphi : x \longrightarrow y$$

であらわします。

　$P \approx_H Q$ ですから、
共通部分のない集合 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ で $P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$ かつ、
共通部分のない集合 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ で $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_n$
とあらわされ、
$P_i \equiv_H Q_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$
となるものがあることになります。

　このとき、H の要素 h_i で $h_i P_i = Q_i$ となるものがあります。
このことは、$h_i : P_i \longrightarrow Q_i$ が P_i の要素が Q_i の要素に余すところなく移っていること
を意味しますが、さらに、この対応は 1:1 です。
したがって、$\varphi : x \longrightarrow y$ を
$x \in P_1$ のときは $h_1 : x \longrightarrow y$
$x \in P_2$ のときは $h_2 : x \longrightarrow y$
$\vdots$
$\vdots$
$x \in P_n$ のときは $h_n : x \longrightarrow y$
と決めることにより、
φ は 1:1 の対応になります。

　準備 2

　この、集合 P から集合 Q への 1:1 の対応を使えば、
$P \approx_H Q$ であるとき
P のかってな部分集合 R と
Q の部分集合 $\varphi(R)$

のあいだには 1:1 の対応があり、
さらに、この対応で R と $\varphi(R)$ は分割合同になることもわかります。
すなわち、$R \approx_H \varphi(R)$ となることになります。

なぜなら、
共通部分のない集合 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ で
$R = (P_1 \cap R) \cup (P_2 \cap R) \cup (P_3 \cap R) \cup \cdots \cup (P_n \cap R)$
$\varphi(R) = \varphi(P_1 \cap R) \cup \varphi(P_2 \cap R) \cup \varphi(P_3 \cap R) \cup \cdots \cup \varphi(P_n \cap R)$
ですが、
$\varphi(P_1 \cap R) = h_1(P_1 \cap R)$
$\varphi(P_2 \cap R) = h_2(P_2 \cap R)$
$\vdots$
$\vdots$
$\varphi(P_n \cap R) = h_n(P_n \cap R)$
ですから、
$R \approx_H \varphi(R)$ となります。

準備３

ここまでくれば、
$P \ll_H Q$ であるとき、すなわち、
集合 P が集合 Q の部分集合と分割合同であるときも同様で、
集合 P から集合 Q のある部分集合 Q_1 との間に 1:1 の対応 φ があり、
この対応で、P と Q_1 が分割合同になります。
すなわち、$P \approx_H Q_1$ となります。
また、P の勝手な部分集合 R と Q の部分集合 $\varphi(R)$ は 1:1 に対応し、
さらに、分割合同になります。
すなわち、$R \approx_H \varphi(R)$ となります。

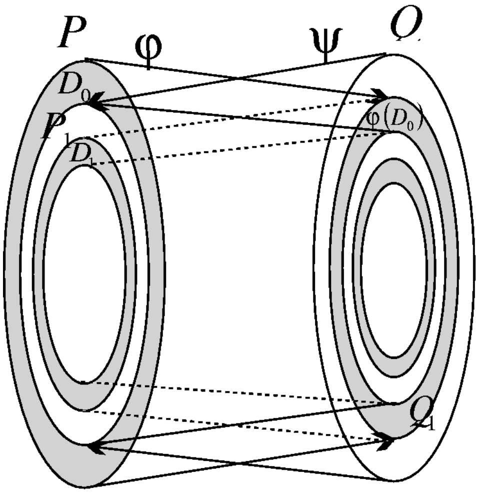
本定理の証明

では、準備が終わりましたので、
『　$P \ll_H Q$ かつ $Q \ll_H P$ であるとき、$P \approx_H Q$ であること』
を示すことにします。

$P \ll_H Q$ ですから、集合 P から集合 Q のある部分集合 Q_1 の間に 1:1 の対応 φ がありますから、
P の勝手な部分集合 R と Q の部分集合 $\varphi(R)$ は分割合同になります。
すなわち、$R \approx_H \varphi(R)$ となります。
同様に、
$Q \ll_H P$ ですから、集合 Q から集合 P のある部分集合 P_1 の間に 1:1 の対応 ψ があり

ますから、
Q の勝手な部分集合 R' と P の部分集合 $\psi(R')$ は分割合同になります。
すなわち、$R' \approx_H \psi(R')$ となります。

　いま、
$D_0 = P - P_1$ とします。
さらに、
$D_1 = \psi\varphi(D_0)$ とします。
以下同様に、
$D_{n+1} = \psi\varphi(D_n)$ とします。
ここで、$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ とすると、
$P - D = \psi(Q - \varphi(D))$ となります。



　ところで、
$P = (P - D) \cup D$ であり、$Q = (Q - \varphi(D)) \cup \varphi(D)$ ですが、

　$P - D = \psi(Q - \varphi(D))$ で、
D と $\varphi(D)$ が分割合同ですから、

　$P = (P - D) \cup D$ と $Q = (Q - \varphi(D)) \cup \varphi(D)$ は分割合同です。

　$(P - D) \cup D \approx_H (Q - \varphi(D)) \cup \varphi(D)$ です。

　すなわち、

『　$P \ll_H Q$ かつ $Q \ll_H P$ であるとき、$P \approx_H Q$ であること』
がわかります。
これで、証明が完結します。

5.5　中心の 1 点を除く球体が球体そのものと分割合同であること

中心の 1 点を除く球体 K' が球体 K そのものと分割合同であることの証明が残っていました。
球体 K の中心を C とします。
球体の北極と中心 C を結ぶ線分の中点を P とします。
この中点を通り、この線分に垂直な直線を回転軸にして、球体の中心 C を回転させます。回転角は 1 回転 $360°$ との比が無理数になるようにとります。例えば、$\theta = \sqrt{2} \times 30°$ とします。
この回転を γ として、点 C をこの回転で動かすことを、中心 γC であらわします。
その移った点をさらに、この回転で動かすことを、γ^2C とあらわし、同様に $\gamma^3\mathrm{C}, \gamma^4\mathrm{C}, \cdots$ を考えます。

$\mathrm{C}, \gamma^3\mathrm{C}, \gamma^4\mathrm{C}, \cdots$ の点全体を A であらわすと、A の点全体には重なりがありません。

なぜなら、もしも、γ^mC と γ^nC が重なったとしたら、$m \times \theta = n \times \theta + 360° \times l$, ($l, m, n$ は整数) となります。
したがって、

$$m \times \theta - n \times \theta = 360° \times l$$

$$(m - n) \times \theta = 360° \times l$$

$$\theta = \sqrt{2} \times 30°$$

でしたから、

$$(m - n)\sqrt{2} \times 30° = 360° \times l$$

$$\sqrt{2} = \frac{360}{30} \times \frac{l}{m - n}$$

となり、有理数と無理数が等しくなってしまいます。
したがって、A の点全体には重なりがないことがわかります。

この、A の点全体 $\mathrm{A} = \{\mathrm{C}, \gamma\mathrm{C}, \gamma^2\mathrm{C}, \cdots\}$ を γ 回転で動かすと、
$\gamma\mathrm{A} = \{\gamma\mathrm{C}, \gamma^2\mathrm{C}, \cdots\}$ となり、
γA は A から点 C を除いたもの $\mathrm{A} - \{\mathrm{C}\}$ になります。

しかし、一方で、$\gamma\mathrm{A}$ は A に回転をおこなっただけのものですから、図形としては合同です。
すなわち、

$$\gamma\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}$$

すなわち、

$$\mathrm{A} - \{\mathrm{C}\} \equiv \mathrm{A}$$

です。
ところで、

$$\mathrm{K} = (\mathrm{K} - \mathrm{A}) \cup \mathrm{A}$$

$$\mathrm{K}' = (\mathrm{K} - \mathrm{A}) \cup (\mathrm{A} - \{\mathrm{C}\})$$

ですから、

$$\mathrm{K} \approx \mathrm{K}$$

6　大きさの異なる二つの球が、分割合同であること

　大きさの異なる球を K と L とします。
K の方が大きいことにします。
はじめに、L を平行移動したものを gL であらわします。

$$\mathrm{S} = \mathrm{L} \cup g_1\mathrm{L} \cup g_2\mathrm{L} \cup g_3\mathrm{L} \cup \cdots \cup g_n\mathrm{L}$$

で、各 g_iL には重なりがないように平行移動したものとします。簡単にいえば、球体 L を n 個集めたものです。
これと、L が分割合同であることがわかります。
すなわち、

$$\mathrm{L} \approx \mathrm{S}$$

であることがわかります。
なぜなら、L は L ２つ分と分割合同でしたから、

$$\mathrm{L} \approx \mathrm{L} \cup g_1\mathrm{L}$$

したがって、

$$\mathrm{L} \cup g_2\mathrm{L} \cup g_3\mathrm{L} \cup \cdots \cup g_n\mathrm{L} \approx \mathrm{L} \cup g_1\mathrm{L} \cup g_2\mathrm{L} \cup g_3\mathrm{L} \cup \cdots \cup g_n\mathrm{L} = \mathrm{S}$$

同様に

$$\mathrm{L} \approx \mathrm{L} \cup g_2\mathrm{L}$$

なので、

$$\mathrm{L} \cup g_3\mathrm{L} \cup \cdots \cup g_n\mathrm{L} \approx \mathrm{L} \cup g_1\mathrm{L} \cup g_2\mathrm{L} \cup g_3\mathrm{L} \cup \cdots \cup g_n\mathrm{L} = \mathrm{S}$$

これを繰り返していけば、

$$\mathrm{L} \approx \mathrm{L} \cup g_1\mathrm{L} \cup g_2\mathrm{L} \cup g_3\mathrm{L} \cup \cdots \cup g_n\mathrm{L} = \mathrm{S}$$

$$\mathrm{L} \approx \mathrm{S}$$

　次に、大きい方の球体 K を L でおおっていきます。重なりがあってもかまいません。とにかく、すきまなくおおうことにします。大きくとも有限の大きさですから、有限個の L でおおうことができます。それらを、

$$L_i(i = 0, 1, 2, \cdots n)$$

とします。すると、

$$\mathrm{K} \ll \mathrm{S}$$

であることが、次のようにしてわかります。
$L_0 \cap \mathrm{K}$ は L の部分と合同ですから

$$L_0 \cap \mathrm{K} \ll \mathrm{L}$$

$L_1 \cap \mathrm{K} - L_0$ は $\mathrm{g}_1\mathrm{L}$ の部分と合同ですから

$$L_1 \cap (\mathrm{K} - L_0) \ll \mathrm{g}_1\mathrm{L}$$

$L_2 \cap \mathrm{K} - L_0 - L_1$ は $\mathrm{g}_2\mathrm{L}$ の部分と合同ですから

$$L_2 \cap (\mathrm{K} - L_0 - L_1) \ll \mathrm{g}_2\mathrm{L}$$

$$\cdots$$

したがって、

$$\mathrm{K} \ll \mathrm{S}$$

$$\mathrm{K} \ll \mathrm{S} \approx \mathrm{L}$$

$$\mathrm{K} \ll \mathrm{L}$$

逆に

$$\mathrm{L} \ll \mathrm{K}$$

はあきらかなので、

$$\mathrm{L} \approx \mathrm{K}$$

となることがわかります。