７のファンタジー

７点のみから成るヴェブレン・ヤング空間

その模型づくり

ませた中学生、向学心に燃える高校生、好奇心旺盛な市民へ

立命館慶祥中学校・高等学校　非常勤講師

渡邊　勝

０．はじめに

2003 年１月 12 日、このサークルで、「超ミニ・スペイス」として、７点のみから成るヴェブレン・ヤング空間とその模型づくりを発表した。

自作した模型は、半円７本と粘土玉７個から出来ているが、半円を直線と見立て、直線の要素である点は、半円の両端と真ん中に３個置かれた。これでは、真ん中の点と両端の点で差別が生じてしまい、「対称性」が失われる。

これを解消すべく、三点を平等に包含する図形として、三角形を考え、三角形に依る立体模型を作ってみた。しかし、これも、三角形が「直線」であると直感するには難しく、工作も手間がかかった。

この度、作成したのは、この空間を人間集団と見立て、その中の部分集合がサークルであることから、その連想で円を直線と見立てることにした。

有限射影幾何の公理系から、図形でない模式を先に示したい。授業で、順列、組み合わせの解説をするとき「４個のものから３個とって一列に並べる」などの説明より「４人から３人選んで一列に並べる」という説明がすんなりと生徒の心に入ることに気が付いた。つまり、人間は人間に興味を持つのだ。この報告でも、人の集団を射影幾何の公理で構成してみた。

参考文献は、原典である ***PROJECTIVE GEOMETRY　VEBLEN and YOUNG*** by Oswald VEBLEN and Jhon Wesley YOUNG、GINN AND COMPANY、1917　をインターネット古書店で入手し、それを参考とした。

１．人間の集団中の射影幾何

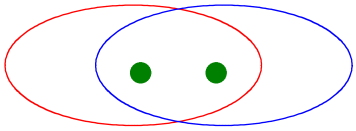
　人の集団、例えば、会社の部、課、係内の人々、学校では学級、「部活」の部、クラブ、地域の町内会などがあるが、その一つ取り出して、Ｓと表す。その中には当然、成員；メムバーがいる。例えば、阿部さん、馬場さん、千葉さん、出口さん、江川さん、藤田さん･･･など、ただし、何人いるか今のところ分からない。

　また、Ｓの中には小グループがある。例えば、「油絵研究会」、「馬券必勝会」、「茶碗作りの会」、「団子賞味会」、･･･などである。これをサークルとよぶ。

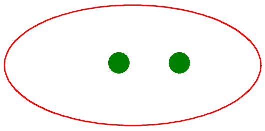
　成員（単に人とよぶ）とサークルは、次の仮定を満足するものとする。

１．　仮定群

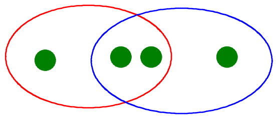
仮定Ｉ　Ｓに属する相異なる二人(の成員)を含む少なくとも一つのサークルがある。



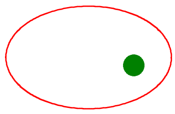
仮定II　Ｓに属する相異なる二人(の成員)を含むサークルは一つより多くはない。



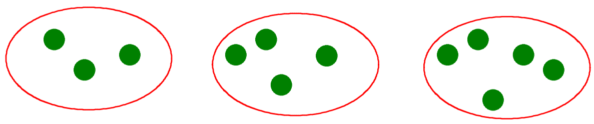
仮定III　相異なる二つのサークルは、少なくとも一人(の成員)を共有する。



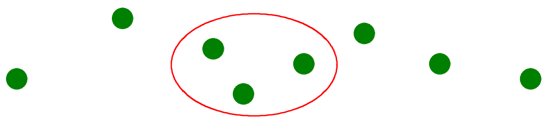
仮定IV　少なくとも一つのサークルがある。



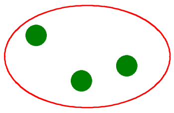
仮定Ｖ　サークルは、少なくとも相異なる三人(の成員)を含む。



仮定VI　Ｓの総ての人々(の成員)は、一つのサークルには含まれない。



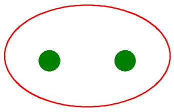
仮定VII　サークルは３人より多くの(の成員)を含まない。（４人以上の成員を含まない）



２．　これらの仮定から次の定理が導かれる。

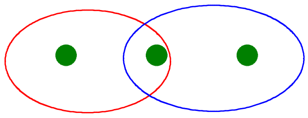
仮定Ⅰと仮定Ⅱ　⇒

　定理１　相異なる二人(の成員)を含むサークルは一つあって唯一つに限る。



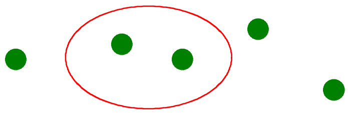
仮定Ⅱと仮定Ⅲ　⇒

　定理２　二つの相異なるサークルは唯一人(の成員)を共有する。

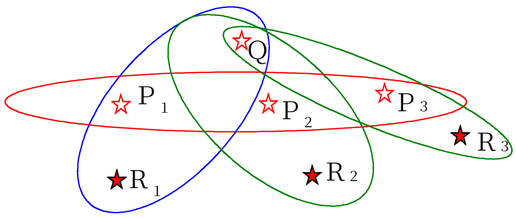


仮定Ⅳと仮定Ⅴと仮定Ⅵ　⇒

　定理３　同一サークルに含まれないＳの三人(の成員)が存在する。



[証明]；仮定Ⅳに言うサークルのうちのひとつをｃとする。仮定Ⅴより、c内には少なくとも相異なる３人が存在するので、３人をP_1、P_2、P_3とする。仮定Ⅵ(Ｓの総ての人々は一つのサークルには含まれない）よりc外にいる人が存在する。この人をＱとして、仮定ⅠよりＱとc内の人P_1を含むサークルc_1が存在する。仮定Ⅴよりc_1には少なくとも相異なる３人が存在するので、P_1、Ｑ 以外の人が少なくとも一人存在する。その内の一人をR_1とする。



　同様に、P_2、Ｑを含むサークルをc_2とすると、c_2にも、P_2、Ｑ 以外の人が少なくとも一人存在する。その内の一人をR_2とする。　P_3、Ｑを含むサークルをc_3とすると、c_3にも、P_3、Ｑ 以外の人が少なくとも一人存在する。その内の一人をR_3とする。

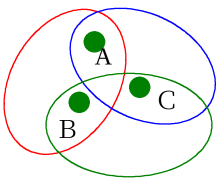
　R_1，R_2、R_3は総てcに含まれない。[終]　[渡邊の証明]

仮定Ⅰ、Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ　⇒

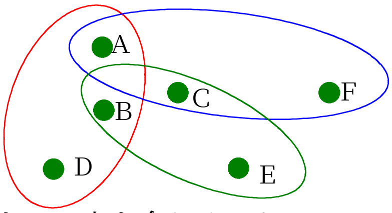
　定理４　集合Ｓは、少なくとも相異なる７人(の成員)を含む。

　[証明]

①　（定理３より）同一サークル内にいない三人Ａ、Ｂ、Ｃをとれば、



② 仮定Ｖ（サークルは３人を含む）より 下図のＤ，Ｅ、Ｆが存在する

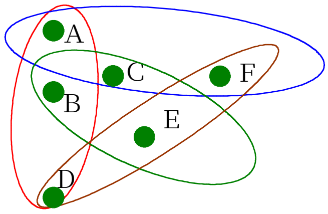


③ 仮定Ⅱ（相異なる二人を含むサークルは一つより多くはない）よりＤ，Ｅ、Ｆは相異なる三人である。

[証明]何故なら、例えばＤとＦが同一の人とすると、異なる二人Ａ，Ｄ(＝Ｆ)が属するサークルに、Ａ－Ｂ－Ｄ(＝Ｆ)とＡ－Ｃ－Ｆ(＝Ｄ)の２サークルがあることになり、仮定Ⅱに反する）(相異なる３人より構成されるサークルも存在する)

人Ａ，Ｅが属するサークルをサークルＡＥのように表す。

④ サークルＡＥ，サークルＢＦは、サークルＡＢ，サークルＢＣ，サークルＣＡとは異なるサークルである。



何故なら、もしサークルＡＥがサークルＢＣと等しいとすれば、ＡがサークルＢＣ内に在り、Ａ，Ｂ，Ｃが同一サークル内にいることになり、①の前提に反する。他のものも同様である。(もし、サークルＢＦがサークルＡＣに等しければ、ＢがサークルＡＣ内に在って、Ａ，Ｂ，Ｃが同一サークル内に在ることになり、①の前提に反する。

⑤ サークルＡＥとサークルＢＦは互いに異なるサークルである。

何故なら、もしこれらが同一のサークルだとすれば、人ＦがサークルＡＢ内に、人ＥもサークルＡＢ内にいなければならない。しかるに、サークルＡＦ内の人ＣがサークルＡＢ内にいることになって、仮定に反する。

⑥ 仮定Ⅲより、サークルＡＥとサークルＢＦは一人を共有する。その人をＧとすれば、Ｇは、仮定ⅡよりＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ、Ｆ以外の新しい人である。ゆえに、Ｓには少なくとも７人が存在する。[終]

仮定Ⅶ ⇒

定理５ 集合Ｓは、相異なる７人(の成員)を含み且つ７人以上は含まない。

[証明]

仮定Ⅲより、サークルＣＤとサークルＡＥＦとは一人の人を共有し、その人はＡでもＥでもないから公理Ⅶ(サークルは三人より多くの人を含まない)に従って点Ｆでなければならない。

同様に、サークルＡＣＧとサークルＤＥには、共通の人Ｇがいる。

成員Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇが作るサークルは下の表の枠のようになる。

A,	B,	C,	D,	E,	F,	G
B,	C,	D,	E,	F,	G、	A
D,	E,	F,	G、	A,	B,	C

仮に、この７人以外に人Ｔが居たとすると、仮定Ⅲより、サークルＴＡとサークルＢＦＧは共通の成員を持つが、
この人は、Ｂではない。なぜなら、サークルＡＢＴは、サークルＡＢＤとＡ，Ｂ二人を共有することになり、定理２に反する。
この人は、Ｆではない。なぜなら、サークルＡＦＴは、サークルＡＦＥとＡ，Ｆ二人を共有することになり、定理２に反する。
また、この人はＧでもない。なぜなら、サークルＡＧＴは、サークルＡＧＣとＡ，Ｇ二人を共有することになり、定理２に反する。
よって、サークルＴＡとサークルＢＦＧには、共通の成員を持たない。
同様に、サークルＴＣ、サークルＴＤ、サークルＴＥそれぞれとサークルＢＦＧにも共通の成員を持たない。
しからば、サークルＢＦＧの中にＴがいるとすれば、仮説Ⅶに反してしまう。
従って、Ｓの人は、Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇの七つの人に限る。[終]

２．ヴェブレン・ヤングの原典紹介

原典に忠実に、体系を述べれば、次のようになる。「公理」「公準」という言葉を避けて「仮定」としている。ある集合Ｓがあって、その部分集合の内、*m-集合*(m-class)なるものを考える

１．　仮定群(Assumptions)

仮定Ⅰ　Ｓに属する相異なる２要素を含む少なくとも一つの*m－集合*がある。
仮定Ⅱ　Ｓに属する相異なる二要素を含む*m－集合*は一つより多くはない。
仮定Ⅲ　相異なる二つの*m－集合*は、少なくとも１要素を共有する。
仮定Ⅳ　少なくとも一つの*m－集合*がある。
仮定Ⅴ　*m－集合*は、少なくとも相異なる３要素を含む。
仮定Ⅵ　Ｓの総ての要素は、一つの*m－集合*には含まれない。
仮定Ⅶ　*m－集合*は３より多い要素を含まない。

２．　これらの仮定から次の定理群(Theorems)が導かれる。
なお、原典では分かり辛い箇所は、上の記述では、詳しく証明したが、以下は原典そのままにしておく。

仮定Ⅰと仮定Ⅱ　⇒

定理１　相異なる二要素を含む*m-集合*は一つあって唯一つに限る。

要素Ａ，Ｂを含む*m-集合*をＡＢのように表す。

仮定Ⅱと仮定Ⅲ　⇒

定理２　二つの相異なる*m-集合*は唯一の要素を共有する。

仮定Ⅳと仮定Ⅴと仮定Ⅵ　⇒

定理３　同一*m-集合*に含まれないＳの３要素が存在する。

同一 *m-集合*に存在しない要素をＡ、Ｂ、Ｃとする。仮定Ｖより、*m-集合*ＡＢ，ＢＣ，ＣＡ外にそれぞれ要素が存在する。仮説Ⅱよりこれらの要素は、Ａ，Ｂ，Ｃとは異なる。

仮定Ⅰ、Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ｖ，Ⅵ　⇒

定理４　集合Ｓは、少なくとも相異なる７要素を含む。

この新しい要素をＤ，Ｅ，Ｆとして、ＡＢＤ，ＢＣＥ，ＣＡＧが *m-集合* になるようにする。仮定Ⅲより、ＡＥとＢＧは、(既に得られた *m-集合*とは違うが)、共通の要素を持つ。仮説Ⅱより、これは、今まで述べた要素とは異なるので、これをＦと名付ける。従って、ＡＥＦ，ＢＦＧも *m-集合*である。

仮定Ⅶ　⇒

定理５　集合Ｓは、相異なる７人(の成員)を含み且つ７人以上は含まない。

仮定Ⅲより、ＣＤとＡＥＦとは１要素を共有し、その要素はＡでもＥでもないから仮定Ⅶに従って点Ｆでなければならない。

同様に、ＡＣＧと *m-集合*ＤＥには、共通の要素Ｇが在る。

要素Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇが作る *m-集合*は下の表の枠のようになる。

A,	B,	C,	D,	E,	F,	G
B,	C,	D,	E,	F,	G、	A
D,	E,	F,	G、	A,	B,	C

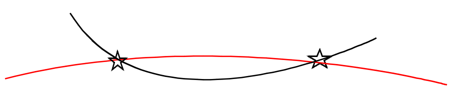
仮に、この７要素以外に要素Ｔが存在したとすると、仮定Ⅲより、*m-集合*ＴＡとＢＦＧは共通の成員を持つことになるが、この要素は、Ｂではない。なぜなら、ＡＢＴＤが *m-集合*となってしまうからである。また、この要素は、Ｆではない。なぜなら、ＡＦＴＥが *m-集合*となってしまうからである。また、この要素はＧでもない。なぜなら、ＡＧＴＣは、*m-集合*となってしまうからである。これら３つの可能性は、仮説Ⅶと矛盾する。ゆえに、Ｔの存在を仮定すれば、*m-集合*ＢＦＧに４要素が存在することになり、仮説Ⅶに反してしまう。従って、Ｓの要素は、Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇの七要素に限る。

３．公理群(仮説群)の図形への応用　２００３年に既に発表済みだが、若干の手直しをして見やすくしたつもりである。

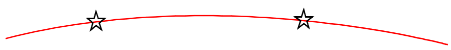
Ⅰ　公理群

無定義用語、点、の集合をＳとし、Ｓの部分集合の内のあるものを直線として、点、直線が次の公理を満足する。

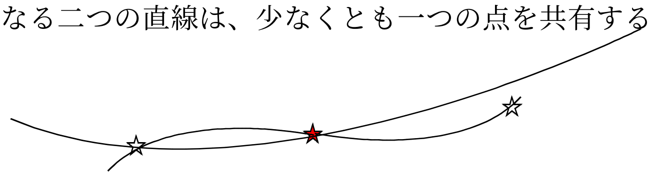
公理１　Ｓに属する相異なる二つの点を含む少なくとも一つの直線がある。



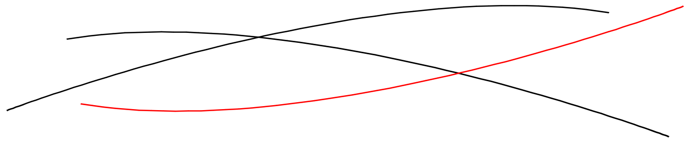
公理２　Ｓに属する相異なる二つの点を含む直線は一つより多くはない。



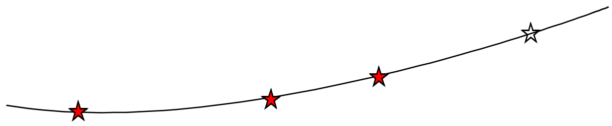
公理３　相異なる二つの直線は、少なくとも一つの点を共有する。



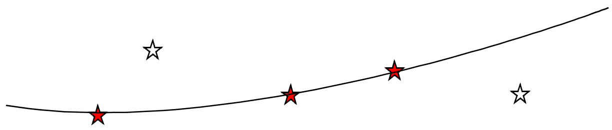
公理４　少なくとも一つの直線がある。



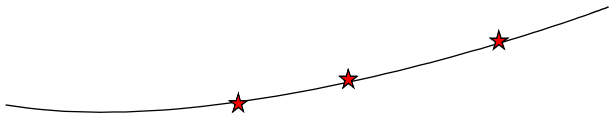
公理５　直線は、少なくとも三つの相異なる点を含む。



公理６　Ｓの点の総ては一つの直線には含まれない。



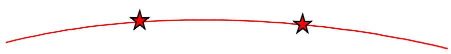
公理７　直線は三つより多くの点を含まない。



Ⅱ　これらの公理から次の定理が導かれる。

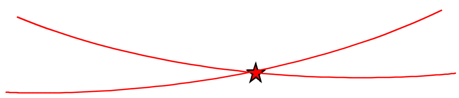
公理１と公理２　⇒

定理１　二つの相異なる点を含む直線は一つあって唯一つに限る。



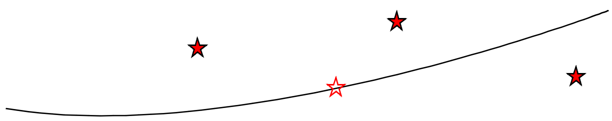
公理２と公理３　⇒

定理２　二つの相異なる直線は一つ而して唯一つの点を共有する。



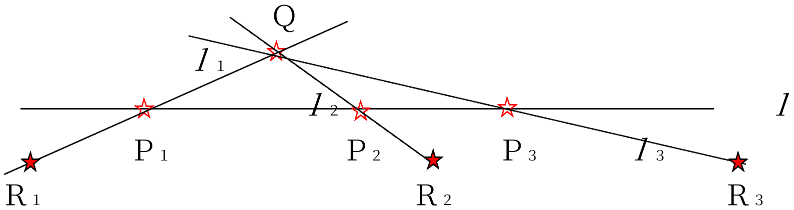
公理４と公理５と公理６　⇒

定理３　同一直線に含まれないＳの三つの点が存在する。



（証明；公理４に言う直線のうちの１本を l とする。公理５より、l 上には少なくとも３個の相異なる点が存在するので、三点を P_1、P_2、P_3 とする。公理６（Ｓの点の総ては一つの直線には含まれない）より l 外にある点が存在する。この点をＱとして、公理１よりＱと l 上の点 P_1 を含む直線 l_1 が存在する。定理５より l_1 には少なくとも３個の相異な

る点が存在するので、P_1、Ｑ 以外の点が少なくとも１個存在する。その内の１個をR_1とする。



　同様に、P_2、Ｑを含む直線を l_2とすると、 l_2にも、P_2、Ｑ 以外の点が少なくとも１個存在する。その内の１個をR_2とする。　P_3、Ｑを含む直線を l_3とすると、l_3にも、P_3、Ｑ 以外の点が少なくとも１個存在する。その内の１個をR_3とする。

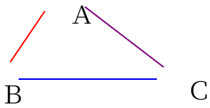
　R_1，R_2、R_3は総て lに含まれない。）[渡邊の証明]

公理１、２，３，４，５，６、７　⇒

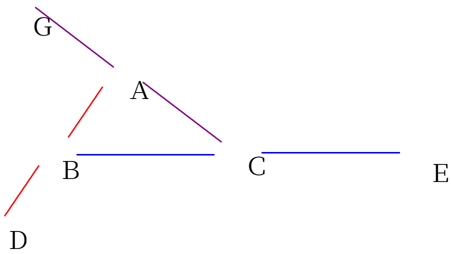
　定理４　集合Ｓは、七つの相異なる点を含み且つ七つ以上は含まない。

　[証明]

①　（定理３より）同一直線上にない三点Ａ、Ｂ、Ｃをとれば、



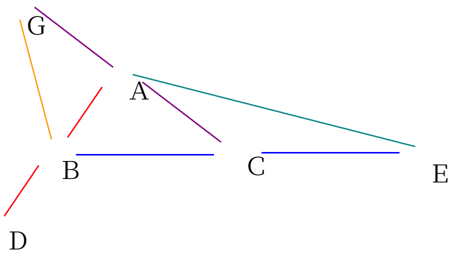
②　公理５（直線は３点を含む）より 下図のＤ，Ｅ、Ｇが存在する



③　公理２（相異なる二点を含む直線は一つより多くはない。）よりＤ，Ｅ、Ｇは相異なる三点である。

（[渡邊証明]何故なら、例えばＤとＧが同一の点とすると、異なる２点Ａ，Ｄ(＝Ｇ)を通る直線に、Ａ－Ｂ－Ｄ(＝Ｇ)とＡ－Ｃ－Ｇ(＝Ｄ)の二本があることになり、公理２に反する）(相異なる３点より構成される直線も存在する)

④　ＡＥ，ＢＧは、ＡＢ，ＢＣ，ＣＡとは異なる直線である。



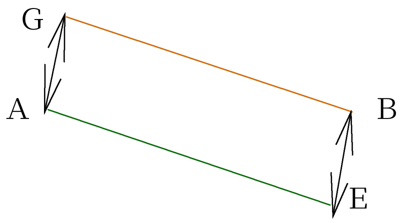
何故なら、もしＡＥがＢＣと等しいとすれば、ＡがＢＣに在り、Ａ，Ｂ，Ｃが一直線上に

在ることになり、①の前提に反する。他のものも同様である。(もし、ＢＧがＡＣに等しければ、ＢがＡＣ上に在って、Ａ，Ｂ，Ｃが一直線上に在ることになり、①の前提に反する。)[渡邊補足]

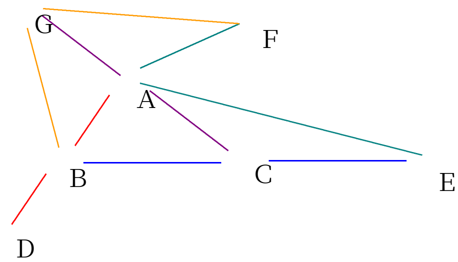
⑤　ＡＥとＢＧは互いに異なる直線である。

何故なら、もしこれらが同一の直線だとすれば、点ＧがＡＢ上に、点ＥもＡＢ上になければならない。しかるに、ＡＧ上の点ＣがＡＢ上にくることになって、仮定に反する。

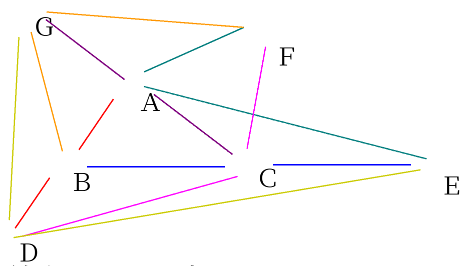
（ＧとＥは相異なるので、ＡＥとＢＧが一致するとすれば次図のようになる）



⑥　公理３より、ＡＥとＢＧは一点を共有する。その点をＦとすれば、Ｆは、公理２よりＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ、Ｇ以外の新しい点である。ゆえに、Ｓには少なくとも７点が存在する。



⑦　公理３より、ＣＤとＡＥＧとは一つの点を共有し、その点はＡでもＥでもないから公理７(直線は三つより多くの点を含まない)に従って点Ｇでなければならない。



即ち、Ｃ，Ｄ，Ｇは一直線上にある三点である。

従って、Ｓの点は、Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇの七つの点に限る。

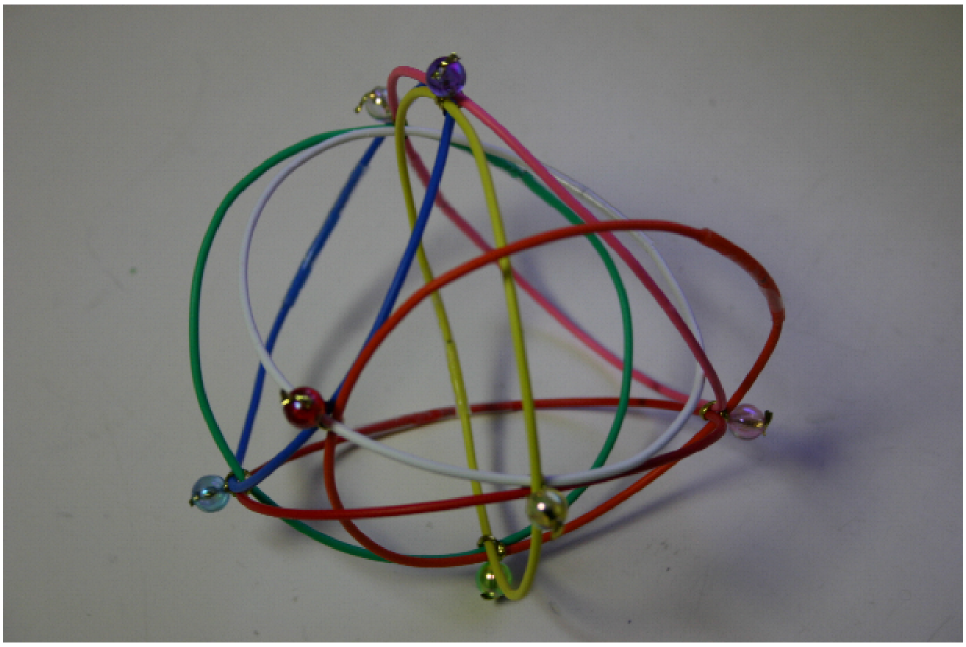
Ⅲ　次の表を作り、列は、三点からなる直線とすれば、公理を総て満足する。

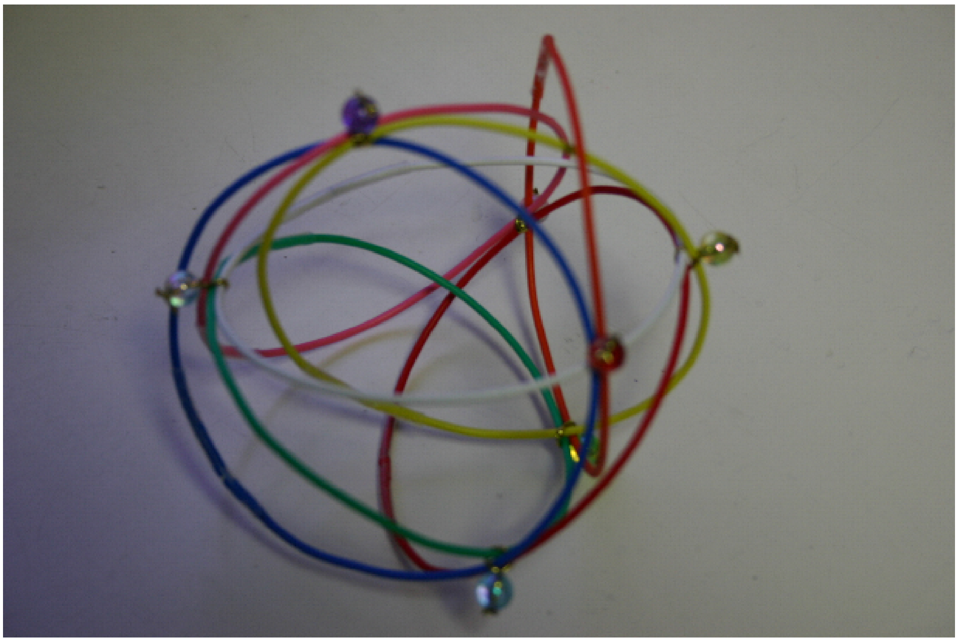
A	B	C	D	E	F	G
|	|	|	|	|	|	|
B	C	D	E	F	G	A
|	|	|	|	|	|	|
D	E	F	G	A	B	C

Ｓを空間と呼べば、この空間には７点と７直線しかない簡単な空間である。

４．模型作り

基本になるサークルを円で表す。これは、カラー針金；100 円ショップでは８色 24 本。
針金を接続するのは、電気部品の収縮パイプ内径２ mm のもの２mで、189 円。
交点になる部分を結束するのは、ワイヤーリボン；100 円ショップでは 100 本、一本から４片採れる。
点を表すビーズ；100 円ショップでは一色 35 個、4 本。





５．ヴェブレンとヤングのことなど近代幾何の歴史。２００３年に既に発表

Cajori ***History of Mathematics*** に依れば、（ｐ.328）
E

In 1907, Oswald Veblen and J. W. Young gave a completely independent set of assumptions for projective geometry, in which points and undefined classes of points called lines have been taken as the undefined elements. Eight of these assumptions characterize general projective spaces; the addition of a ninth assumption yields properly projective spaces.

１９０７年に、オスワルド・ヴェブレンと J.W.ヤングは射影幾何についての完全に独立な公理群を示した。その公理では、点と「直線」と呼ばれる点の集合が無定義要素として取り扱われている。８個の公理が一般的な射影幾何を特徴づけるが、第９の公理を付け加えて厳密な射影空間を作る。（渡邊拙訳）

因みに『岩波数學辭典』により近代幾何学史を繙くと

ジャン・ヴィクトル・**ポンスレ** Jean Victor Poncelet（1788 〜 1867）が 1822『図形の射影的性質論』Traité des propriétés projectives des figures を著した。

カール・フリードリッヒ・**ガウス** Karl Friedrich Gauss（1777 〜 1855）が ”１点を通ってある直線に平行な直線を２本引く”こととしても矛盾のない幾何ができることを発見。ガウスの「非ユークリッド幾何」ガウス自身の命名。

ニコライ・イヴァノヴィッチ・**ロバチェフスキー** Nikolai Ivanovich Lobachefskii（1793 〜 1856） が非ユークリッド幾何を発見。1826 年カザン大学理学部集会で公表。

父；ファルカシュ・ボヤイ Farkas Bolyai（1775 〜 1856）の息子；ヤーノシュ・**ボヤイ** Janos Bolyai （1802 〜 1860）平行線公理を外した「絶対幾何」absolute geometry 発見 1832 年。

ガウス没 1855 以降ガウス全集出版その中で、人々は既に上述非ユークリッド幾何が発見されていたことを知った。

1854 年ベルンハルト・**リーマン** Bernhard Riemann（1826 〜 1866）”幾何学の基礎にある仮説について”ゲッチンゲン大学就任講演

フェリックス・**クライン** Felix.Klein（1849 〜 1925）1872 年”エルランゲン・目録”ユークリッド幾何、非ユークリッド幾何ともに射影幾何に「従属する」ことを明らかにした。幾何的モデルを案出。1879 年頃から企業で製造。

ダヴィド・**ヒルベルト** David Hilbert が『幾何学の基礎』：***Grundlagen der Geometrie***1899 年に初出版

1907 年に、オスワルド・ヴェブレン Oswald Veblen(1880 〜と J.W.ヤング J. W. Young は射影幾何についての完全に独立な公理群を示した。

ヒルベルト Hilbert によるユークリッド幾何(３次元）の公理系
１．結合の公理　[(1)、(2)、(3)までは、平面幾何の公理系]
(1)　Ａ，Ｂが２点ならば、Ａ，Ｂともその上にあるような直線ａが存在する。
　　ａがＡ，Ｂを通るともいう。
(2)　Ａ，Ｂが相異なる２点ならば、Ａ，Ｂを通る直線ａはただ一つしかない。
　　このａをＡ，Ｂが定める直線という。
(3)　一つの直線上には少なくとも二つの相異なる点がある。少なくとも３つの一直線上にない点が存在する。
(4)　Ａ，Ｂ，Ｃが３つの１直線上にない点ならば、Ａ，Ｂ，Ｃがその上にあるような平面αが存在する。
(5)　Ａ，Ｂ，Ｃが３つの１直線上にない点ならば、Ａ，Ｂ，Ｃを通る平面αはただ一つしかない。
(6)　直線ａ上の二つの相異なる点Ａ，Ｂが平面αの上にあるならば、ａの上の任意の点はみなαの上にある。
(7)　点Ａが二つの平面α、βのどちらの上にもあるならば、α、βの両方の上にある点がＡの他に少なくとも一つはある。
(8)　少なくとも４つの、１つの平面上にはない点が存在する。
２．順序の公理
３．合同の公理
４．平行の公理
５．連続の公理
＊D.Hilbert：***Grundlagen der Geometrie*** 1899 年初版
岩波数學辭典より

二次元射影幾何の公理系
１．結合の公理
(1)　二つの相異なる点を含む直線が存在する。
(2)　二つの相異なる点を含む直線は一つより多くない。
(3)　直線上には三つの相異なる点が存在する。
(4)　同一の直線上にない三つの点が存在する。
２．順序の公理
３．連続の公理