第４分科会　数学教育（中学・高校）

『無　限　級　数』数学者オイラーの挑戦

組織名：北海道高等学校教職員組合

報告者：真鍋和弘

職　場：北海道札幌篠路高等学校

目　　　　次

§０　はじめに

　最近の国際比較による調査結果などから、日本の子どもたちの学力について関心が高まっている。なかでも科学や数学について、世界のトップクラスであった日本の地位がどんどん後退していくのではないかという「不安」が、とくに財界の指導者たちなどから高まってきているように思う。筆者も最近の高校生たちの姿を見て、学ぼうとする意欲が少なくなってきたなあと感じることがある。けれどもこれは日本だけの状況ではなく「先進国」共通の問題でもある。産業構造の転換によって「より豊かでより快適に」なった生活の中で、習熟するためにはある程度の苦労が必要な数学を勉強することは、昔より困難になっている。それでも何割かの生徒は真面目に数学を学ぼうとしている。これはたいしたものだと思う。

　安倍首相の「教育再生会議」が強調する「規範意識の向上」や「道徳教育の重視」だけでは学力は回復しないと思われる。それどころか、むしろ逆の結果をもたらす恐れもある。いま必要なのは物理学者ファインマンが理想とする「どこか、目立たないところに独特な個性的な教師と学生がいて、・・・、彼らはそれを考え考えーさらにそれらを発展させることに夢中になっている」(『ファインマン物理学』序文　岩波書店）ような場所をあちらこちらに作ることではないだろうか。ファインマンはまた同じ箇所で次のようにも述べている。「最善の教育というものは、いい学生といい教師との間に、直接の特別のつながりがある場合ー

学生が考え方を論じ、ものごとについて考え、ものごとについて語るーそうゆう場合にのみ可能だということを認識するよりほかはないと考えている。講義に出たり、また出された宿題をやったりするだけではたいした勉強はできはしない」

北海道で毎年 11 月にひらかれている合同教育研究全道集会では、各地域で行われている教育のいとなみを報告し合い、交流と研究を続けている。昨年の数学分科会では、小学校から大学までの教員が参加し、全部で 11 本のレポートが集まった。小学校からは、カプレカー数とカプレカー操作に関するものや異分母分数どうしの通分についての報告、中学校からは、ガウスによる等差級数の和のもとめ方に関する報告があった。高校からは８本のレポートが集まり、基礎学力をつけるため校内で数学検定をとりくんだ報告、対数計算の指導、命題と論理の授業、「ハノイの塔」や「欠損チェス盤」などのゲームを取り入れた数列の授業プランなどの報告が続いた。また恒例の「札幌子育て・文化・教育フェスティバル」における市民講座でとりくまれた「数学的帰納法」や「無限級数」についての報告もあった。今回の特徴として、高校の期限付教員や朝鮮高級学校の教員など新しい顔ぶれの参加が目立った。

§１　無限級数の歴史

数列を順番に加えていくとどうなるのか？という問題は古代から興味をもって研究されており、有名なアルキメデスの『放物線の求積』の中にも登場する。当時はまだ文字式を使った級数の表現がなく、限りなく続く図形の系列として認識されていたにすぎない。

初めて無限級数を本格的に数学の対象としてとりあげたのは、微積分を発見したニュートンとライプニッツだろう。この時代は数学史家の高瀬正仁さんが言うところの「微積分学の古層」にあたる（高瀬正仁：『ｄｘとｄｙの解析学』日本評論社)。その後ベルヌーイ一族やオイラーなどによって発展させられた無限小解析学は、無限級数を駆使して、多くの結果を出すことに成功した。1748 年にオイラーは『無限解析入門』を著し、そのなかでいまでも多くの数学者たちが注目するζ（ゼータ）をはじめ、数多くの無限級数の公式を報告している。ところが残念なことに、現在の高校のカリキュラムでは、無限級数はすべての高校生が習うべき項目に入っていない。主に理系に進む生徒が 3 年になって学ぶ「数学Ⅲ」で初めて登場する。　歴史的にもオイラーたちの無限級数の方が、コーシーの微積分の理論（高校 2 年生で初めて習う）よりもずっと古い。高瀬正仁さんは上記の本のあとがきで「歴史の流れに沿って学ぶならば、小学生もオイラーを理解するであろう」と述べている。

無限級数をもっと早い段階（例えば中学生）でとりあげたいと言うのが筆者の願いであった。幸いにも、高校での「中学生の体験授業」の講師を引き受けることになり、『無限級数』の授業をおこなうことができた。また同じ授業を「札幌子育て・文化・教育フェスティバル」でもおこなった。

授業では、無限級数を形式的な無限個の数の和としてあつかい、収束や発散などというきちんとした級数論には（敢えて）ふれなかった。ここでは授業の中でとりあげた数学史について、数学者別に簡単な解説をおこなうことにする。

アルキメデス　B.C.287 ？～ 212

古代のギリシャ人たちは、すでに無限等比級数の和をもとめる方法を知っており、例えば、公比が１／２の無限等比級数：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

の和が２になることを知っていたと言われている。アルキメデスは『放物線の求積』のなかで、「放物線が任意の直線によって切り取られる部分の面積は、それに内接する最大の３角形の面積の４／３倍となる」という命題を証明している。彼はこの部分の面積を無限に続く３角形の面積の和（公比が１／４の無限等比級数）として近似し、その和がこの部分の面積に等しいことをユードクソスの「取り尽くし法」により証明している（斎藤憲『よみがえる天才アルキメデス』岩波書店)。彼の用いた級数を現代風に書けば

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{4}{3}$$

となる。アルキメデスの求積法は３角形分割をもとに構成されており、長方形分割（リーマン積分）に慣れたわれわれから見るとすっきりしないでもない。しかし、いまから２千年以上も前にすでにこれだけの成果を導いていたアルキメデスの天才ぶりには脱帽するほかはない。

ニコル・オーレム　1323 ～ 1382

フランスの数学者・宗教家であったオーレムは1350年ころ『幾何学の超人ユークリッドの問題』という本を書き、その中で自然数の逆数の和が無限大になることを巧みな方法を用いて証明している。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\infty$$

この級数は調和級数と呼ばれている。どの教科書にも紹介されているこの証明のポイントは、予めいくつかの分数をまとめて計算しておくというものである。具体的には、

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

という関係を使う。したがって

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\\
&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots\\
&\geqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\\
&=1+1+1+\cdots=\infty
\end{aligned}
$$

となって証明が終わる。

ゴットフリート・ヴィルヘルム・ライプニッツ　1646 ～ 1716

　ドイツ人の法律家・外交官でもあったライプニッツは、1673年に次の公式（ライプニッツ級数とよばれる）を発見し、数学の道に転じる決心をしたと言われている。

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

ただしこの公式は、最初に1400年ころ南インド・ケララ州出身の数学者マーダヴァによって得られている。その後にスコットランド人の数学者ジェームズ・グレゴリーも発見している。ライプニッツの公式は、グレゴリーが1671年に発見した $\tan^{-1}x$ の級数展開

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\cdots$$

を使って、$x=1$ とおけば得ることができる。

ヤコブ・ベルヌーイ　1654 ～ 1705

　スイスのバーゼルで生まれたヤコブ・ベルヌーイは調和級数が発散するという別の証明を与えている。1689年に彼は『無限級数の扱い』という本を書き、未解決の問題として、平方数の逆数の和をもとめよという有名な問題を提出した（バーゼル問題）。

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots$$

彼はこの級数が収束して２以下となることを次のように証明している。

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\quad=2-\frac{1}{n}$$

したがって n をどんどん大きくしていけば

$$1+1/4+1/9+1/16+1/25+\cdots\leqq 2.$$

多くの数学者の試みにもかかわらず、バーゼル問題の解決は18世紀のオイラーへと引き継がれることになった。

レオンハルト・オイラー　1707 〜 1783

　スイス生まれの数学者オイラーは間違いなく18世紀最高の数学者である（古今東西で最高という評価もある）。オイラーは調和級数が自然対数log nのように発散することを見つけている。彼の著書『無限解析入門』では次のように表現している。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\log\infty=\infty$$

また、ｎまでの調和級数とlog nとの差

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\log n$$

のｎ→∞の極限は、オイラー（マスケローニ）定数γ：

$$\gamma=0.5772156649\cdots$$

とよばれ、現在もなお数学のなかでもっとも謎に満ちた数の一つである。いまだにγが有理数か無理数かも分かっていない。

　オイラーはヤコブ・ベルヌーイの「バーゼル問題」に果敢に挑戦し、苦労の末1735年についに決着をみた。彼の得た結果は（驚くべきことに）円周率πに関係するものだった。

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}=1.64493406684\cdots$$

この公式は数学で現れるものの中で、もっとも素晴らしい公式として位置づけられている。オイラーは奇想天外な方法で上の公式を導いている。それは次のような方法である。

　彼は微積分でよく知られている３角関数の級数展開から出発した。

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

両辺をｘで割って次の式を得る。

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots$$

この関数はｘ＝０のとき１であり、ｘの絶対値が大きくなるにつれて徐々に０に近づいていく、穏やかでなめらかな偶関数である。この関数が０になるｘの値は、ｓｉｎ　ｘ＝０のときで（ｘ＝０のときを除く）

$$x=\pm\pi,\ \pm2\pi,\ \pm3\pi,\ \cdots$$

である。そこでオイラーは大胆にもこの関数は因数分解できて（ただし無限の積として）、次のかたちに書けるに違いないと考えた。

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

$$=1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)x^2+(\cdots)x^4-\cdots$$

すなわち、同じ関数の異なる二つの表現が得られたことになる。そこでx^2の係数をくらべると、

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots$$

となって，もとめる公式

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots$$

がでてくる。同様にしてオイラーはx^4，x^6の係数を比べることにより公式

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945}$$

を得ている。こうして分母の指数が偶数の場合について、一般的な公式をオイラーは見つけることができた。ところが指数が奇数の場合、例えば立方数の逆数の和

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots$$

について、この無限級数の正確な値はまだわかっていない。ようやく1978年になって、フランスの数学者ロジェ・アペリーがこの和が無理数であることを初等的な方法で証明した。現在でも指数が一般の奇数の場合についてはほとんど何もわかっていない。

ベルンハルト・リーマン　1826 〜 1866

1859年にドイツの数学者リーマンは、今まで個別に研究されてきた自然数のべき乗和を

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$$

で表し、変数ｓを複素数に拡張した関数を考えた。ζ(ｓ)はリーマンのゼータとよばれ、整数論において素数の分布と密接に関係していることがわかっている。時代は元にもどるが、実はオイラーはｓが整数の場合のζ(ｓ)の値をたくさん計算している。ｓが偶数のときの

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\ \zeta(2)=\frac{\pi^4}{90},\ \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}$$

などは先に示した通りであるが、ｓが０や負の整数値の場合、その結果はまさに常識をくつがえすものであった。

$$\zeta(0)=\text{“}1+1+1+1+\cdots\text{”}=-\frac{1}{2},$$
$$\zeta(-1)=\text{“}1+2+3+4+\cdots\text{”}=-\frac{1}{12},$$
$$\zeta(-2)=\text{“}1+4+9+16+\cdots\text{”}=0,$$
$$\zeta(-3)=\text{“}1+8+27+64+\cdots\text{”}=\frac{1}{120}.$$

ここで記号“・・・”はうまく解釈するという意味である。この計算が数学的に“正しかった”ことが、解析接続という手法により、100年後のリーマンによって確かめられている。リーマンは同じ年に

$$\text{“}1\times2\times3\times4\times\cdots\text{”}=\sqrt{2}\,\pi$$

という公式を発見している。

§２　無限級数の授業

中学生を対象にした授業は2006年9月9日におこなわれた。時間は45分間、参加してくれたのは近隣の中学3年生35名である。手書きのプリントを使い、全員分の電卓が準備できなかったので各自手計算でやってもらった。

＜プリント＞

〔問１〕次の和をもとめよう（等比級数）

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

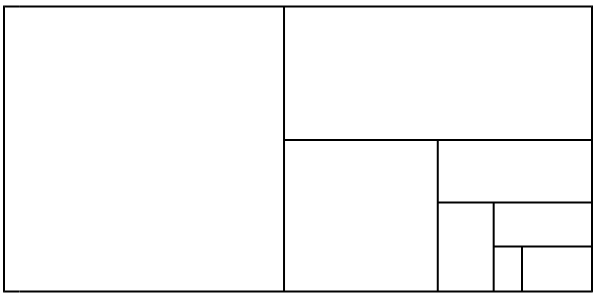
＊　この和が２に近づくことを手計算で予想してもらい、下の図を用いてこの和が２になることを納得してもらった。

$$1+\frac{1}{2}=1.5$$

$$1+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=1.75,$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1.875,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$



〔問２〕次の和をもとめよう（調和級数）　　　　　オーレム（1350年ころ）

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

＊　手計算でこの和がどうなるか予想してもらったが、誰も無限大になることを予想できた生徒はいなかった。オーレムの証明を紹介したが、何人かの生徒は理解してくれたが、大部分の生徒にとっては難しく感じたようであった。

〔問３〕次の和をもとめよう（平方数の逆数の和）　　　　　オイラー（1735年）

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

＊　さすがにこの値を知っている生徒はいないだろうと思い、天下り的にこの和がちょうどπ^2／６であることを教えた。数学史にもふれ、オイラーがこの値を知っていかに喜んだかを紹介した。生徒たちもどうして円周率πがでてくるのか不思議そうであった。あわせてオイラーがおこなった怪しい計算

“ $1+2+3+4+5+\cdots$ ”$=-1/12$

“ $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots$ ”$=1/120$

の例なども紹介した。

［問４］次の和をもとめよう（立方数の逆数の和　未解決問題！）

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots$$

＊　この和が無理数という以外、まだ何もわかっていないことを紹介した。

＜生徒の感想＞

全員から感想をもらってはいない。「難しかった」という感想もあったが、3名の生徒から「オイラーはすごい」とか、ただ「オイラー、オイラー」とだけ書いた感想をもらった。

§３　sinｘの無限積表現

高校生に授業する場合は、少しでも$\zeta(2)=\pi^2/6$の証明にふれたほうがよいと思う。そこで問題となるのはやはり、sinｘを無限積として表す公式：

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

である。実際、オイラーによる最初の証明（1735）は当時としても不十分なものだった。$\zeta(2)=\pi^2/6$をきちんと証明するには、複素関数や級数の収束などについての知識がいる。古くは高木貞治の『解析概論』（岩波書店　初版1938）にもあるが、アイグナーとツィーグラーの『天書の証明』には初等的な証明がいくつか紹介してある。オイラーは自分自身や当時の同僚を満足させるような証明をいくつか考案している。ここでは、オイラーが『無限解析入門』（1748）のなかでおこなっている指数関数e^xの定義を使った証明を紹介する。

［定理］　オイラー（1748）

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

［証明］

複素数ｚの方程式　$z^n-a^n=0$を考える。この解はよく知られているようにｎ個あり

$$z=ae^{\frac{2\pi k}{n}} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

である。いまｎが奇数の場合を考えると、これらの解を

$$z=a,\ ae^{\frac{2\pi i}{n}},\ ae^{\frac{4\pi i}{n}},\ \cdots,\ ae^{\frac{(n-1)\pi i}{n}},$$

$$ae^{-\frac{2\pi i}{n}},\ ae^{-\frac{4\pi i}{n}},\ \cdots,\ ae^{-\frac{(n-1)\pi i}{n}}$$

とかくことができる。したがって多項式z^n-a^nは因数分解できて、$p=(n-1)/2$として

$$z^n-a^n=(z-a)\left(z-ae^{\frac{2\pi i}{n}}\right)\left(z-ae^{-\frac{2\pi i}{n}}\right)\times\cdots\times\left(z-ae^{\frac{2p\pi i}{n}}\right)\left(z-ae^{-\frac{2p\pi i}{n}}\right)$$

$$=(z-a)\prod_{1\leqq k\leqq p}\left(z-ae^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)\left(z-ae^{-\frac{2k\pi i}{n}}\right)$$

$$=(z-a)\prod_{1\leqq k\leqq p}\left(z^2-2az\cos\frac{2k\pi}{n}+a^2\right)$$

となる。ここでオイラーの関係式

$$2\cos\frac{2k\pi}{n}=e^{\frac{2k\pi i}{n}}+e^{-\frac{2k\pi i}{n}}$$

を使った。上の式で、

$$z=1+\frac{x}{n},\ a=1-\frac{x}{n}$$

とすれば、

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\\
&=\frac{2x}{n}\cdot\prod_{1\leqq k\leqq p}\left(2+\frac{2x^2}{n^2}-2\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\cos\frac{2k\pi}{n}\right)\\
&=\frac{2x}{n}\cdot\prod_{1\leqq k\leqq p}\ 2\left(\left(1\text{-}\cos\frac{2k\pi}{n}\right)+\frac{x^2}{n^2}\cdot\left(1+\cos\frac{2k\pi}{n}\right)\right)\\
&=Cx\cdot\prod_{1\leqq k\leqq p}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\cdot\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{n}}{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}\right)
\end{aligned}$$

となる。ただし定数Ｃは

$$C=\frac{2}{n}\cdot\prod_{1\leqq k\leqq p}2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)$$

である。ここでＣの計算をおこなう必要はない。というのは左辺のｘの係数は二項定理から２となり、Ｃ＝２であることがわかる。したがって

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=2x\cdot\prod_{1\leqq k\leqq p}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\cdot\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{n}}{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}\right)$$

ここで奇数ｎ（およびｐ）を大きくとると，e^xの定義から

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\to e^x-e^{-x}$$

および、cos の級数展開から

$$\cos\frac{2k\pi}{n}\ \to\ 1-\frac{1}{2}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)^2$$

となるので、上の式は

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=x\cdot\prod_{1\leqq k\leqq\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

となる。ここで、ｘをｉｘで置き換えれば、証明すべき式

$$\sin x=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$$

$$=x\cdot\prod_{1\leqq k\leqq\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

$$=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

が得られる。 ■

定数Ｃの値や、ｎを奇数のまま無限大にするところなど、完全に厳密とはいえないが、高校生にも十分説得力のあるすばらしい証明だと思う。あらためてオイラーの天才ぶりに感動する。

【文　献】

Ｌ.オイラー，高瀬正仁（訳）:『オイラーの無限解析』　海鳴社（2001).
Ｅ.ハイラー，Ｌ．ワナー:『解析教程　上』　シュプリンガー・フェアラーク東京（1997).
W．ダンハム:『数学の知性』　現代数学社（1998).
W．ダンハム:『オイラー入門』　シュプリンガー・フェアラーク東京（2004).
Ａ.ヴェイユ:『数論ー歴史からのアプローチ』　日本評論社（1987).
斎藤憲:『よみがえる天才アルキメデス』岩波書店（2006).
黒川信重:『数学の夢ー素数からのひろがり』　岩波書店（1998).
加藤和也，黒川信重，斎藤毅:『数論Ｉ』　岩波書店（2005).
梅田亨:「円とゼータ」　数学のたのしみ（創刊号）　日本評論社（1997).
若山正人:「収束級数と発散級数」　数学セミナー（10月号）日本評論社（2003).
小林昭七:『なっとくするオイラーとフェルマー』　講談社（2003).