道数協夏の研究大会

０７．７．３１～８．１

いろいろな無理数

真鍋　和弘（札幌篠路高校）

われわれ数学者にとって、数学史の第一の効用というのは、第一級の数学上の業績の「図解された例」をわれわれの目の前に明らかにしてくれることである。

Ａ．ヴェイユ（1978）

目　　　　次

０．はじめに・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　2
１．$\sqrt{2}$ が無理数である証明・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　2
２．$\log_{10} 2$ が無理数である証明・・・・・・・・・・・・・・・・・・・3
３．ｅが無理数である証明・・・・・・・・・・　・・・・・・・・・・3
４．πが無理数である証明・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　4
５．無理数であることが証明された数，まだ証明されてない数・・・　7
文　献・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　9

０　はじめに

現在の高校の教科書では$\sqrt{2}$やｅ，πなどは無理数だと書かれているが、$\sqrt{2}$を除いて、その数が無理数である証明にはふれていない。ｅやπが無理数に見えるのは、いつまでも続く小数展開：

$$e = 2.7182818284 \cdots$$
$$\pi = 3.1415926535 \cdots$$

を見ていると規則性がないようにも思えるからである。しかし、もしかしたらどこかで繰り返しているのかも知れないなどと思ってしまう。ｅやπなどの数表を配ると、生徒たちがいつまでも飽きることなくじっと眺めていられるのは、そのせいかも知れない。

生徒たちの夢を打ち砕くようで忍びないが、数学を学ぶ以上、どこかできっちりと証明を考えさせることも必要だと思う。そうしなければ、話は飛躍するが、由緒ある書店の店頭に「フェルマーの大定理の初等的証明」とか、「相対性理論は間違っている」、「血液型と性格」「超霊能力･･･」などというタイトルの本がいつまでも並ぶのである。生徒たちに「数学の証明」にはどんな詭弁も打ち破れるだけの超絶的な力があることを知らせることも必要ではないだろうか。ここではいろいろな数について、これが無理数であることの証明を紹介する。

調べていくうちに、無理数だと証明されている数は意外と少なく、この証明は古今東西の数学者たちによって営々と続けられてきた飽くなき挑戦の結果だということもよくわかった。最初は代数的数*である$\sqrt{2}$の証明からはじめる。

よく知られているように、$\sqrt{2}$が無理数である証明は非常に古く、2000 年以上も前に書かれたユークリッドの『原論』にもでている。

（注）*整数を係数とする代数方程式の根となる複素数を代数的数、そうでない数を超越数とよぶ。

１　$\sqrt{2}$が無理数である証明

高校の教科書にでている証明は、整数の偶奇性を利用したものが多い（というよりほとんどである)。そこで初等整数論によるものを紹介する［1］。これはガウスによって明らかにされた平方剰余の規則を利用するもので、ガウスならきっと知っていたにちがいないと思われる証明である。

【定理１】$\sqrt{2}$は無理数である.

［証明］　整数aを３で割ればその余りは０，１，２のいずれかである．同様に、その２

乗a^2を３で割ればその余りは０，１のいずれかである．いま$\sqrt{2}$が有理数だと仮定し，

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

とおく．ここでm,nは整数で互いに素である（つまり右辺の分数は既約分数とする）．この式を２乗すると

$$2n^2 = m^2$$

となる．いまm^2が３で割り切れるとすると，n^2も３で割り切れることになるが，これはm,nが互いに素であることに反する．したがって上に述べたことから，m^2を３で割った余りは１である．したがって$2n^2$を３で割った余りも１となるが，これはあり得ない．なぜならn^2が３で割り切れないとき，$2n^2$を３で割った余りは必ず２となるからである．これは矛盾である．すなわち$\sqrt{2}$は無理数である． ■

２　$\log_{10} 2$が無理数である証明

　次に常用対数$\log_{10} 2$が無理数であることをしめす。これは容易で、平方根の証明よりずっと簡単である。

【定理２】$\log_{10} 2$は無理数である．

［証明］　m,nを整数として$\log_{10} 2 = \frac{m}{n}$とおく．これから　$2^n = 10^m$　となるが，これは素因数分解の一意性から起こりえない．したがって$\log_{10} 2$は無理数である． ■

　一般にa,bが整数で，$b^n = a^m$となる整数m,nが存在しなければ，対数$\log_a b$は無理数となる．

３　ｅが無理数である証明

　対数の発明者ネイピアによって 1614 年ころに導入された数 e が、オイラーによって無理数であることが証明されたのは、1744 年のことである［2］［3］。その証明は e の無限和による表示：

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

を用いるもので、さすがにオイラーならではの素晴らしい証明である。［5］[6]

【定理３】　e は無理数である.

［証明］ｅを次のように２つの部分に分ける．ただし$n>1$とする.

$$e=\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)+\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\right)$$

前半部分は明らかに有理数なので、後半部分が問題となる。いまｅが有理数とすると,
正の整数a,bによって$e=a/b$と表せる．すると$n\geqq b$に対して

$$\alpha=n!\left(e-\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right)$$

とおけば，αは整数となる．なぜなら，$n!e$と$n!/k!$とがともに整数になるからである.
(ここで 0≦ｋ≦ｎ)．しかし，一方でαは

$$\alpha=\frac{n!}{(n+1)!}+\frac{n!}{(n+2)!}+\cdots=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$$

と書くこともできる．そこでαの大きさを見積もることができて,

$$0<\alpha<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots=\frac{1}{n}$$

となる．ここで無限等比級数の公式を使った．αは整数であったから，これは矛盾である.
すなわち e は無理数である.　■

４　πが無理数である証明

ｅに比べると，πが無理数である証明は少々込み入っている。その理由はよく分からないが、ｅよりもπの方が数としての構造がより複雑なのかもしれない。最初にπが無理数であることを証明したのは、フランス生まれの数学者ランベルトで 1761 年のころである。オイラーを含め当時の数学者が、無理数を研究する際に用いた道具はおもに連分数であった。ランベルトの証明の概要は次のようなものである[4]。

①　$\tan x$の連分数展開が，すべての実数xに対し

$$\tan x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cdots}}}}$$

となることを用いて、xが有理数ならば、$\tan x$は必ず無理数となることを示した。

②　①から、もしπが有理数なら $\tan\frac{\pi}{4}$ は必ず無理数となるはずである。ところが等式：

$\tan\frac{\pi}{4}$ ＝１により、１は無理数となる。これは矛盾。したがってπは無理数である。

ランベルトの証明は素晴らしいものだが、連分数に慣れてないわれわれにとってはとっつきにくい。実は、一部に微積分を使うが、日本人によるたいへん簡潔な証明が知られている。πではなくπ^{2}の無理数性を証明する方が実は簡単なのである。当時、大阪理工科大学（現：近畿大学）の学生であった岩本義和さんが見つけたものである（1949 年)。次にこれを紹介しよう。今ではドイツをはじめ世界中の数学書に彼の論文が引用されている [6]［7］。その元々のアイデアはニーヴンが 1947 年におこなった証明にもとづいている [1]［2]。

【定理４】　πは無理数である.

証明に先立ち、２つの補題をしめしておく。

【補題１】　π^{2}が無理数ならば，πは無理数である.

［証明］　πが有理数なら，π^{2}は有理数である．この対偶をとればよい.　■

【補題２】　次に定義される関数 $f(x)$ は以下の３つの性質を満たす.

ある整数ｎ（ｎ≧１）に対して

$$f(x)=\frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

とおく.

（ｉ） $f(x)$ は $\frac{1}{n!}\sum_{m=n}^{2n}c_m x^m$ という形の多項式で，係数 c_m はすべて整数である.

（ii） $0<x<1$ に対して， $0<f(x)<\frac{1}{n!}$ である.

（iii）すべての整数 $k(\geq 0)$ に対して， x が０と１のときの微分係数

$f^{(k)}(0)$ と $f^{(k)}(1)$ は整数である.

［証明］

（ｉ）（ii）は $f(x)$ の定義から明らかなので，（iii）を示す．まず， $x=0$ のときを考える． $k<n$ または $k>2n$ のときは， $f^{(k)}(0)=0$ となる．ｎ≦k≦２ｎのときは，（ｉ）から

$$f^{(k)}(0)=\frac{k!}{n!}c_k$$

であるが，これは整数である．したがって，すべての整数kと（$k \geqq 0$）に対して$f^{(k)}(0)$は整数となる．次に，$x=1$のときを考える．関数等式$f(x)=f(1-x)$が成り立つから，すべてのxに対して，

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k f^{(k)}(1-x)$$

である．よって$f^{(k)}(1)=(-1)^k f^{(k)}(0)$となり，$f^{(k)}(1)$も整数である． ■

［定理４の証明］π²が有理数だと仮定し，正の整数a,bによって$\pi^2=a/b$とおく．

補題２の関数$f(x)$から新しい関数

$$F(x)=b^n[\pi^{2n}f(x)-\pi^{2n-2}f^{(2)}(x)+\pi^{2n-4}f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x)]$$

をつくると，（iii）から$F(0)$と$F(1)$は整数となる．さて，$F(x)$をxで２回微分すると，

$$F''(x)=-\pi^2F(x)+b^n\pi^{2n+2}f(x)$$

となる．また

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[F'(x)\sin\pi x-\pi F(x)\cos\pi x]&=[F''(x)+\pi^2F(x)]\sin\pi x\\&=b^n\pi^{2n+2}f(x)\sin\pi x\\&=\pi^2a^nf(x)\sin\pi x\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\alpha=\pi\int_0^1 a^nf(x)\sin\pi x\,dx&=\left[\frac{1}{\pi}F'(x)\sin\pi x-F(x)\cos\pi x\right]_0^1\\&=F(0)+F(1)\end{aligned}$$

は整数となる．いっぽう補題２の（ii）より，

$$0<\pi\int_0^1 a^nf(x)\sin\pi x\,dx<\frac{\pi a^n}{n!}$$

である．したがって，十分大きなnに対して，

$$0<\alpha<\frac{\pi a^n}{n!}<1$$

となる（任意の正の実数cに対し，十分大きなnをとれば，$\dfrac{c^n}{n!}$はいくらでも小さくすることができる）**．αは整数であったから，これは矛盾である．よってπ^2は無理数であり，補題１からπもまた無理数である． ■

同様の方法で、e^r（ｒは 0 でない有理数）が無理数であることも証明できる。$r=1$とおけば再びｅが無理数であることが確かめられる。

（注）** 証明はたいていの解析の教科書にある。ここではラング[８]の本から引用する。

［証明］　正の整数mを，$m>2c$であるようにえらぶ．そのとき，$\dfrac{c}{m}<\dfrac{1}{2}$である．そこで，$n$を$m$より大きい整数とすれば

$$\begin{aligned}
\frac{c^n}{n!} &= \frac{c\cdot c\cdots c}{1\cdot 2\cdots m}\cdot\frac{c}{m+1}\cdot\frac{c}{m+2}\cdots\frac{c}{n} \\
&< \frac{c^m}{m!}\cdot\frac{c}{m}\cdot\frac{c}{m}\cdots\frac{c}{m} \\
&< \frac{c^m}{m!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2} \\
&< \frac{c^m}{m!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}
\end{aligned}$$

ここでnを大きくすれば，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-m}$ はいくらでも小さくなる．　■

５　無理数であることが証明された数，まだ証明されていない数

大学で関数を習うときにでてくる「ディリクレの関数」というものがある。xを任意の実数、Qを有理数の集合とするとき

$$f(x)=\begin{cases}1(x\in Q)\\0(x\notin Q)\end{cases}$$

がその定義である。しかし実際にこの関数を構成することは不可能である。なぜなら、いまだに無理数かどうかわからない数多くの数が存在するからである。この節では、現在までに無理数であることがわかっている数、わかっていない数を紹介する[9] [10]。

ｅやπなどが無理数であることが証明されたあと、数学者のおもな関心は超越数であるかどうかに移ってきた。具体的な個々の数について、はじめて超越数であることが証明されたのは、無理数の証明から 100 年以上たった 1873 年のエルミートによるｅの超越性の証明である。続いて 1882 年にリンデマンによってπが超越数であることが証明された。

次に問題とされた数は、$2^{\sqrt{2}}$ のような数が超越数（少なくとも無理数）かどうかであっ

た。1900 年にヒルベルトは数学者会議で未解決の 23 個の「数学の問題」を提起した[11]。その第 7 番めの問題がこれである。より一般的には「αを0と1でない代数的数，βを有理数でない代数的数とするとき，α^{β} は超越数か」という問題である。ヒルベルト自身はこの問題は難しくて今世紀中には解決しないだろうと予想していたが、1934 年にソ連のゲルフォントとドイツのシュナイダーによって超越数となることが独立に証明された。これによって、例えば e^{π} も超越数（無理数）となる。なぜなら、オイラーの関係式によって

$$e^{i\pi} = -1$$

であるが、両辺を $-i$ 乗すると

$$e^{\pi} = (-1)^{-i}$$

となるからである。

最近では、リーマンのゼータ関数

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} \cdots$$

における $\zeta(3)$ の値が無理数であることが、1979 年にフランスのアペリーによって証明された。証明は[2]にでている。

s が偶数の場合については、すでに 1735 年にオイラーによって、$\zeta(s)$ は π^s と有理数の積になることがしめされている（したがって $\zeta(s)$ は無理数である)。例えば、

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2, \zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4, \zeta(6) = \frac{1}{945}\pi^6$$

である。この有理数の部分は、本質的にはベルヌーイ数と呼ばれる数に関係している。

これまで述べてきたように無理数（当然、超越数かどうかも）だと証明された数はわずかである。まだ無理数（超越数）かどうかわかっていないｅやπに関係する数として、

$$e + \pi, e\pi, \pi^e$$

などがある。

それ以外に無理数かどうかわかっていない有名な数として、オイラー・マシェロニ数γ：

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0.5772156649 \cdots$$

がある。また s が５以上の奇数の場合のゼータ関数 $\zeta(s)$ についても、ほとんど何もわかっていない[12]。まだまだ多くの数学の未知の問題が、みなさんの挑戦を待っているのである。

【文　献】

無理数や超越数について
[１]　一松　信　『数のエッセイ』　ちくま学芸文庫（2007）
[２]　塩川宇賢　『無理数と超越数』　森北出版（1999）
[３]　ドゥラエ　『π－魅惑の数』　朝倉書店（2001）
[４]　ハイラー，ワナー　『解析教程』上　シュプリンガー・フェアラーク東京（1997）
[５]　ハーディ，ライト　『数論入門Ⅰ』　シュプリンガー・フェアラーク東京（2001）
[６]　アイグナー，ツィーグラー『天書の証明』　シュプリンガー・フェアラーク東京（2002）
[７]　エビングハウス他　『数（上)』　シュプリンガー・フェアラーク東京（1991）
[８]　ラング　『解析入門』(原書第３版)　岩波書店（1978）

歴史的なことについて
[９] ベックマン　『πの歴史』　蒼樹書房（1973）
[10] デュドネ編　『数学史 1700 － 1900』Ⅰ　岩波書店（1985）
[11] 一松　信　訳・解説『ヒルベルト　数学の問題』　共立出版（1969）
[12] コンウェイ，ガイ　『数の本』　シュプリンガー・フェアラーク東京（2001）