自然数の k 乗和

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

成田收*

2006.7.31

*数教協会員　北海道静内高校

目 次

1　平方和　$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

前の時間に $1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$ を n の式で表す式を考えました。
その式は

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

でした。
急に出てきたのでびっくりした人もいたようですが、

$$(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$$

から、

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

の式を使って、この式に、$n=1,2,3,\cdots$ を代入して順に並べてたすことによって得られました、

$$\begin{array}{ccccccccc}
2^3 & - & 1^3 & = & 3\cdot 1^2 & + & 3\cdot 1 & + & 1 \\
3^3 & - & 2^3 & = & 3\cdot 2^2 & + & 3\cdot 2 & + & 1 \\
4^3 & - & 3^3 & = & 3\cdot 3^2 & + & 3\cdot 3 & + & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(n+1)^3 & - & n^3 & = & 3\cdot n^2 & + & 3\cdot n & + & 1 \\
\hline
(n+1)^3 & - & 1^3 & = & 3\cdot(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) & + & 3\cdot(1+2+3+\cdots+n) & + & (1+1+1+\cdots+1)
\end{array}$$

となります。
$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$、$1+1+1+\cdots+1=n$ ですから、

$$(n+1)^3-1^3=3\cdot(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

より

$$\begin{aligned}
3\cdot(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) &= (n+1)^3-1^3-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n \\
&= (n+1)^3-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-(n+1) \\
&= \frac{2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)\{2(n+1)^2-3n-2\}}{2} \\
&= \frac{(n+1)\{2n^2+4n+2-3n-2\}}{2} \\
&= \frac{(n+1)\{2n^2+n\}}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)\}}{2}
\end{aligned}$$

したがって、

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)\}}{6}$$

となることが分かります。

2　３乗和　$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

ここまでにわかった式を並べてみると、

$$\begin{array}{ccccc} 1+1+1+\cdots+1 & = & n & = & n \\ 1+2+3+\cdots+n & = & \dfrac{n(n+1)}{2} & = & \dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{2} \\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 & = & \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} & = & \dfrac{1}{3}n^3+\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{6}n \end{array}$$

これは、

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots + n^0 = n \tag{1}$$

$$1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots + n^1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \tag{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \tag{3}$$

とみることができます。

$$\begin{aligned} 1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots + n^0 &= S_0(n) \\ 1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots + n^1 &= S_1(n) \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= S_2(n) \\ &\vdots \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} S_0(n) &= n \\ S_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\ S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \end{aligned}$$

となります。

$S_3(n)$ や $S_4(n)$ などはどんな式になるでしょう。
$S_2(n)$ までの情報から $S_3(n)$ や $S_4(n)$ を知ることはできないでしょうか。

3　$S_1(n)$ と $S_2(n)$ の関係、$S_0(n)$ と $S_1(n)$ の関係

　ここでは、$S_2(n)$ から $S_3(n)$ を予測することを考えます。
そのために、$S_1(n)$ と $S_2(n)$ を比較してみます。
$S_1(n)$ は 1 次式、$S_2(n)$ は 2 次式で、その次数の違いは 1 次です。
一般に多項式は、積分すると次数が 1 次増えて、微分すると 1 次減ります。
では、$S_2(n)$ を微分して、$S_2'(n)$ を計算してみましょう。

$$S_2'(n) = (\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n)' = n^2 + n + \frac{1}{6}$$

となって、$\frac{1}{6}$ を除くと、$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ と大変よく似ています。

$\boldsymbol{S_2(n)} \longrightarrow$ 微分 $\longrightarrow$　定数を除く $\longrightarrow$　$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$をかける $\longrightarrow$　$\boldsymbol{S_1(n)}$

　同様に、$S_0(n)$ と $S_1(n)$ を比較するために $S_1(n)$ を微分してみると、

$$S_1'(n) = (\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n)' = n + \frac{1}{2}$$

となって、$\frac{1}{2}$ を除くと、$S_0(n) = n$ と大変よく似ています。

$\boldsymbol{S_1(n)} \longrightarrow$ 微分 $\longrightarrow$　定数を除く $\longrightarrow$　$\boldsymbol{\frac{1}{1}}$をかける $\longrightarrow$　$\boldsymbol{S_0(n)}$

　そうすると、逆に積分すると、$\cdots$

　$S_0(n)$ から $S_1(n)$ を求めてみます。
$\boldsymbol{S_0(n)} \longrightarrow$ **1** をかける $\longrightarrow$　定数を加える $\longrightarrow$ 積分 $\longrightarrow$　$\boldsymbol{S_1(n)}$

　ここで定数を決めると良いのですが、$S_1(0) = 0^1 = 0$, $S_1(1) = 1^1 = 1$ ですから、簡単に定数が決まります。

　$S_1(n)$ から $S_2(n)$ を求めてみます。
$\boldsymbol{S_1(n)} \longrightarrow$ **2** をかける $\longrightarrow$　定数を加える $\longrightarrow$ 積分 $\longrightarrow$　$\boldsymbol{S_2(n)}$

　ここで、$S_2(0) = 0^2 = 0$, $S_2(1) = 1^2 = 1$ から定数を決めます。

4　$S_2(n)$ から $S_3(n)$ を求める

　では、$S_3(n)$ を求めてみましょう。
できた式は
1^3
1^3+2^3
$1^3+2^3+3^3$
などをうまく計算することができるでしょうか。

$$S_3(n) = \boxed{}$$

組 ＿＿＿ 番号 ＿＿＿ 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

5　$S_3(n)$ から $S_4(n)$ を求める

$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$ となりました。$S_3(n)$ から $S_4(n)$ を求めるには、

$\boldsymbol{S_3(n)} \longrightarrow$ **4 をかける** $\longrightarrow$ **定数を加える** $\longrightarrow$ **積分** $\longrightarrow$ $\boldsymbol{S_4(n)}$

そうして、$S_4(0) = 0^4 = 0$, $S_4(1) = 1^4 = 1$ から定数を決めます。

実際に計算します。

$$
\begin{aligned}
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\
4S_3(n) &= n^4 + 2n^3 + n^2 \\
4S_3(n) + C &= n^4 + 2n^3 + n^2 + C \\
\int (4S_3(n) + C)dn &= \int (n^4 + 2n^3 + n^2 + C)dn \\
&= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + Cn + C_1
\end{aligned}
$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + Cn + C_1$$

ここで、$S_4(0) = 0^4 = 0$, $S_4(1) = 1^4 = 1$ なので、

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 0 \\
\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + C &= 1 \\
&\quad \text{より、} \\
\frac{6 + 15 + 10}{30} + C &= 1 \\
\frac{31}{30} + C &= 1 \\
C &= 1 - \frac{31}{30} \\
&= -\frac{1}{30}
\end{aligned}
$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

この式で $n=2$ とすると、

$$\begin{aligned}
S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n \\
S_4(2) &= \frac{1}{5}2^5+\frac{1}{2}2^4+\frac{1}{3}2^3-\frac{1}{30}2 \\
&= \frac{32}{5}+\frac{16}{2}+\frac{8}{3}-\frac{2}{30} \\
&= \frac{32}{5}+8+\frac{8}{3}-\frac{1}{15} \\
&= \frac{96+120+40-1}{15} \\
&= \frac{255}{15} \\
&= 17
\end{aligned}$$

となりますが、

$$1^4+2^4=1+16=17$$

ですから、得られた式は $n=2$ では正しいことが分かります。
同様に、この式で $n=3$ とすると、

$$\begin{aligned}
S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n \\
S_4(3) &= \frac{1}{5}3^5+\frac{1}{2}3^4+\frac{1}{3}3^3-\frac{1}{30}3 \\
&= \frac{243}{5}+\frac{81}{2}+\frac{27}{3}-\frac{3}{30} \\
&= \frac{243}{5}+\frac{81}{2}+9-\frac{1}{10} \\
&= \frac{486+405+90-1}{10} \\
&= \frac{980}{10} \\
&= 98
\end{aligned}$$

となりますが、

$$1^4+2^4+3^4=1+16+81=98$$

となり、正しいことが分かります。
どうやら、

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$

は正しいようです。

6 $S_k(n)$ を鑑賞する

$$
\begin{aligned}
S_0(n) &= 1+1+1+\cdots+1 &&= n \\
S_1(n) &= 1+2+3+\cdots+n &&= \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n \\
S_2(n) &= 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 &&= \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n \\
S_3(n) &= 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 &&= \frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2 \\
S_4(n) &= 1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 &&= \frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n
\end{aligned}
$$

これは、

$$
\begin{aligned}
S_0(n) &= 1+1+1+\cdots+1 &&= n \\
S_1(n) &= 1+2+3+\cdots+n &&= \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n \\
S_2(n) &= 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 &&= \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n \\
S_3(n) &= 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 &&= \frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2+0n \\
S_4(n) &= 1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 &&= \frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3+0n^2-\frac{1}{30}n
\end{aligned}
$$

とみることができます。
この系列から $S_5(n)$ を得ようとすると、
まず、$S_4(n)$ を 5 倍して、

$$
\begin{aligned}
5S_4(n) &= n^5+\frac{5}{2}n^4+\frac{5}{3}n^3+0n^2-5\frac{1}{30}n \quad \text{です。} \\
\text{また、}S_5(n) &= an^6+bn^5+cn^4+dn^3+en^2+fn \quad \text{とおくと、}
\end{aligned}
$$

$5S_4(n)$ を積分して、$S_5(n)$ がえられることから、e までの係数は、

$$
\begin{aligned}
a &= 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \\
b &= \frac{5}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \\
c &= \frac{5}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \\
d &= 0 \times \frac{1}{3} = 0 \\
e &= \left(-5\frac{1}{30}\right) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

として得られます。
また、係数 f は

$$S_5(1) = a + b + c + d + e + f = 1$$

から

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{5}{12} - \frac{1}{12} + f &= 1 \\
\frac{2+6+5-1}{12} + f &= 1 \\
\frac{12}{12} + f &= 1 \\
f &= 0
\end{aligned}$$

となります。
したがって、$5S_4(n), 4S_3(n), 3S_2(n), \cdots$ が本質的な役割を果たしているように見えるので、それを並べてみます。

$$\begin{aligned}
S_0(n) &= n \\
2S_1(n) &= n^2 + n \\
3S_2(n) &= n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
4S_3(n) &= n^4 + 2n^3 + n^2 \\
5S_4(n) &= n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{1}{6}n \\
6S_5(n) &= n^6 + 3n^5 + \frac{5}{2}n^4 - \frac{1}{2}n^2
\end{aligned}$$

7　$(k+1)S_k(n)$ の係数についての考察

この係数だけを取り出します。

$$
\begin{array}{cccccc}
S_0(n) & 1 & & & & \\
2S_1(n) & 1 & 1 & & & \\
3S_2(n) & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & & \\
4S_3(n) & 1 & 2 & 1 & 0 & \\
5S_4(n) & 1 & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\
6S_5(n) & 1 & 3 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2}
\end{array}
$$

計算過程から考えて、積分して n 倍するため

$$
\begin{array}{lllllll}
1 & & \frac{1}{2} & & & & \\
\downarrow \times\frac{1}{2}\times 2 & \swarrow \times 2 & & & & & \\
1 & 1 & & \frac{1}{6} & & & \\
\downarrow \times\frac{1}{3}\times 3 & \downarrow \times\frac{1}{2}\times 3 & \swarrow \times 3 & & & & \\
1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & & 0 & & \\
\downarrow \times\frac{1}{4}\times 4 & \downarrow \times\frac{1}{3}\times 4 & \downarrow \times\frac{1}{2}\times 4 & \swarrow \times 4 & & & \\
1 & 2 & 1 & 0 & & -\frac{1}{30} & \\
\downarrow \times\frac{1}{5}\times 5 & \downarrow \times\frac{1}{4}\times 5 & \downarrow \times\frac{1}{3}\times 5 & \downarrow \times\frac{1}{2}\times 5 & \swarrow \times 5 & & \\
1 & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & & 0 \\
\downarrow \times\frac{1}{6}\times 6 & \downarrow \times\frac{1}{5}\times 6 & \downarrow \times\frac{1}{4}\times 6 & \downarrow \times\frac{1}{3}\times 6 & \downarrow \times\frac{1}{2}\times 6 & \swarrow \times 6 & \\
1 & 3 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 &
\end{array}
$$

となりますから、かける数を分数にまとめると、

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
S_0(n) & 1 & & & & \frac{1}{2} & & & & & & & & \\
 & \downarrow & \times\frac{2}{2} & & \swarrow\times 2 & & & & & & & & & \\
2S_1(n) & 1 & & 1 & & & & \frac{1}{6} & & & & & & \\
 & \downarrow & \times\frac{3}{3} & \downarrow & \times\frac{3}{2} & & \swarrow\times 3 & & & & & & & \\
3S_2(n) & 1 & & \frac{3}{2} & & \frac{1}{2} & & & & 0 & & & & \\
 & \downarrow & \times\frac{4}{4} & \downarrow & \times\frac{4}{3} & \downarrow & \times\frac{4}{2} & & \swarrow\times 4 & & & & & \\
4S_3(n) & 1 & & 2 & & 1 & & 0 & & & & -\frac{1}{30} & & \\
 & \downarrow & \times\frac{5}{5} & \downarrow & \times\frac{5}{4} & \downarrow & \times\frac{5}{3} & \downarrow & \times\frac{5}{2} & & \swarrow\times 5 & & & \\
5S_4(n) & 1 & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & 0 & & -\frac{1}{6} & & & & 0 \\
 & \downarrow & \times\frac{6}{6} & \downarrow & \times\frac{6}{5} & \downarrow & \times\frac{6}{4} & \downarrow & \times\frac{6}{3} & \downarrow & \times\frac{6}{2} & & \swarrow\times 6 & \\
6S_5(n) & 1 & & 3 & & \frac{5}{2} & & 0 & & -\frac{1}{2} & & 0 & & \\
 & n^6 & & n^5 & & n^4 & & n^3 & & n^2 & & n^1 & &
\end{array}
$$

となります。

つまり、

$6S_5(n)$ の n^6 の係数は、$S_0(n)$ の n の係数 1 に $\frac{2}{2}\frac{3}{3}\frac{4}{4}\frac{5}{5}\frac{6}{6} = \frac{1}{1}\frac{2}{2}\frac{3}{3}\frac{4}{4}\frac{5}{5}\frac{6}{6} ={}_6C_6 ={}_6C_0$ をかけて得られます。

同様に、

$6S_5(n)$ の n^5 の係数は、$S_1(n)$ の n の係数 $\frac{1}{2}$ に $2\frac{3}{2}\frac{4}{3}\frac{5}{4}\frac{6}{5} = \frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}\frac{5}{4}\frac{6}{5} ={}_6C_5 ={}_6C_1$ をかけて得られます。

$6S_5(n)$ の n^4 の係数は、$S_2(n)$ の n の係数 $\frac{1}{6}$ に $3\frac{4}{2}\frac{5}{3}\frac{6}{4} = \frac{3}{1}\frac{4}{2}\frac{5}{3}\frac{6}{4} ={}_6C_4 ={}_6C_2$

$6S_5(n)$ の n^3 の係数は、$S_3(n)$ の n の係数 0 に $4\frac{5}{2}\frac{6}{3} = \frac{4}{1}\frac{5}{2}\frac{6}{3} ={}_6C_3$

$6S_5(n)$ の n^2 の係数は、$S_4(n)$ の n の係数 $-\frac{1}{30}$ に $5\frac{6}{2} = \frac{5}{1}\frac{6}{2} ={}_6C_2 ={}_6C_4$

$6S_5(n)$ の n の係数は、$S_5(n)$ の n の係数 0 に $6 = \frac{6}{1} ={}_6C_1 ={}_6C_5$ をかけると得られることが分かります。

今、

$S_0(n)$ の n の係数 1 を B_1

$S_1(n)$ の n の係数 $\frac{1}{2}$ を B_2

$S_2(n)$ の n の係数 $\frac{1}{6}$ を B_3

$S_3(n)$ の n の係数 0 を B_4

$S_4(n)$ の n の係数 $-\frac{1}{30}$ を B_5

$S_5(n)$ の n の係数 0 を B_6

とおくと、

$6S_5(n)$ の n^6 係数は ${}_6C_0B_1$

$6S_5(n)$ の n^5 係数は ${}_6C_1B_2$

$6S_5(n)$ の n^4 係数は ${}_6C_2B_3$

$6S_5(n)$ の n^3 係数は ${}_6C_3B_4$

$6S_5(n)$ の n^2 係数は ${}_6C_4B_5$

$6S_5(n)$ の n 係数は ${}_6C_5B_6$

ですから、

$$6S_5(n) = {}_6C_0B_1n^6 + {}_6C_1B_2n^5 + {}_6C_2B_3n^4 + {}_6C_3B_4n^3 + {}_6C_4B_5n^2 + {}_6C_5B_6n \qquad (1)$$

となることが分かります。

$6S_5(n)$ の n の係数 B_6 だけは、$S_4(n)$ までの係数だけからすぐには分かりませんが、次のようにして計算することができます。

上の式で $n = 1$ とすると、$S_5(1) = 1^5 = 1$ から、

$$6S_5(1) = {}_6C_0B_1 + {}_6C_1B_2 + {}_6C_2B_3 + {}_6C_3B_4 + {}_6C_4B_5 + {}_6C_5B_6 = 6$$

すなわち、

$$B_6 = \frac{1}{6}\Big(6 - {}_6C_0B_1 - {}_6C_1B_2 - {}_6C_2B_3 - {}_6C_3B_4 - {}_6C_4B_5\Big)$$

として計算することができます。

この、$B_0 = 1, B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, \cdots$ のことを、ベルヌーイ数といいます。[1]

[1] １７１３年にヤコブ・ベルヌーイの遺稿集として出された Ars Conjectandi において初めてふれられたものといわれている。ヤコブ・ベルヌーイはこの公式を用いて、1から１０００までの１０乗の和を計算するのに「４分の１時間の半分」もかからなかったと述べているということである。しかし、日本の和算家、関孝和の遺稿集「括要算法」は１７１２年に出版されているが、このベルヌーイ数の計算方法及び自然数のべき乗和について述べている。関孝和も自然数の１１乗までの公式を具体的に求め、ベルヌーイ数の一般的計算方法（上に述べた方法）を「括要算法」のなかで示している。したがって、このベルヌーイ数なるものは、関数（せきすう）と呼ぶのがふさわしい数であるということができる。

8 $S_6(n), S_7(n), S_8(n), S_9(n), S_{10}(n)$

では、前の章で分かったことを使って、$S_6(n), S_7(n), S_8(n), S_9(n), S_10(n)$ を求めてみましょう。

9 $S_3(n)$ を積分すると $S_4(n)$ が得られる理由

これまで、$S_3(n)$ を積分すると $S_4(n)$ が得られ、$S_4(n)$ を積分すると $S_5(n)$ が得られること、つまり、$S_k(n)$ を積分すると $S_{k+1}(n)$ が得られることを利用して計算してきましたが、考えてみると、どうしてそうなるかということについてははっきり分かりませんでした。この理由を考えてみます。
$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$ ですから、
$S_3(n-1) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3$ です。

$$
\begin{array}{rlcccccccccccc}
 & S_4(n) & = & 1^4 & + & 2^4 & + & 3^4 & + & \cdots & + & (n-1)^4 & + & n^4 \\
-) & S_4(n-1) & = & 1^4 & + & 2^4 & + & 3^4 & + & \cdots & + & (n-1)^4 & & \\
\hline
 & S_4(n) - S_4(n-1) & = & & & & & & & & & & & n^4
\end{array}
$$

$$S_4'(n) - S_4'(n-1) = 4 \cdot n^3$$

$$
\begin{array}{rcccc}
S_4'(n) - S_4'(n-1) & = & 4 \cdot n^3 & & \\
S_4'(n-1) - S_4'(n-2) & = & 4 \cdot (n-1)^3 & & \\
 & \vdots & & & \\
S_4'(3) - S_4'(2) & = & 4 \cdot 3^3 & & \\
S_4'(2) - S_4'(1) & = & 4 \cdot 2^3 & & \\
S_4'(1) - S_4'(0) & = & 4 \cdot 1^3 & & \\
\hline
S_4'(n) - S_4'(0) & = & 4\{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\} & = & 4S_3(n)
\end{array}
$$

$$S_4'(n) - c = 4S_3(n)$$
$$S_4'(n) = 4S_3(n) + c$$
$$\int S_4'(n)dn = \int \{4S_3(n) + c\}dn$$
$$S_4(n) = \int \{4S_3(n) + c\}dn$$

となり、$S_3(n)$ を積分すると $S_4(n)$ が得られる[2]ことがわかります。

[2]正確には $S_3(n)$ を 4 倍して定数 c をたして積分すると $S_4(n)$ が得られる。定数 c は $n = 0, 1$ を代入して、$S_4(0) = 0, S_4(1) = 1$ から得られる。

10　$S_k(n)$ の求め方（まとめ）

7 章の（1）式で示したように、$S_5(n)$ は

$$6S_5(n) = {}_6C_0B_1n^6 + {}_6C_1B_2n^5 + {}_6C_2B_3n^4 + {}_6C_3B_4n^3 + {}_6C_4B_5n^2 + {}_6C_5B_6n \qquad (1)$$

となります。

${}_6C_0$ から ${}_6C_6$ の値は、パスカルの三角形から得ることができますし、B_0 から B_5 までは、これ以前に得られていますが、B_6 の値はまだ分かりません。

しかし、（1）式に $n = 1$ を代入すると、$S_5(1) = 1$ より、

$$6 = {}_6C_0B_1 + {}_6C_1B_2 + {}_6C_2B_3 + {}_6C_3B_4 + {}_6C_4B_5 + {}_6C_5B_6$$

となるので、B_6 の値を求めることができます。

では、一般に $S_k(n)$ を求める方法についてまとめておきましょう。

パスカルの三角形

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

の各段に、B_k を順次かけて

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1B_0 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1B_0 & & 1B_1 & & & & & & \\
 & & & & & 1B_0 & & 2B_1 & & 1B_2 & & & & & \\
 & & & & 1B_0 & & 3B_1 & & 3B_2 & & 1B_3 & & & & \\
 & & & 1B_0 & & 4B_1 & & 6B_2 & & 4B_3 & & 1B_4 & & & \\
 & & 1B_0 & & 5B_1 & & 10B_2 & & 10B_3 & & 5B_4 & & 1B_5 & & \\
 & 1B_0 & & 6B_1 & & 15B_2 & & 20B_3 & & 15B_4 & & 6B_5 & & 1B_6 & \\
1B_0 & & 7B_1 & & 21B_2 & & 35B_3 & & 35B_4 & & 21B_5 & & 7B_6 & & 1B_7
\end{array}$$

右端の $1B_k$ を k に置き換えます。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1B_0 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1B_0 & & 2B_1 & & 2 & & & & & \\
 & & & & 1B_0 & & 3B_1 & & 3B_2 & & 3 & & & & \\
 & & & 1B_0 & & 4B_1 & & 6B_2 & & 4B_3 & & 4 & & & \\
 & & 1B_0 & & 5B_1 & & 10B_2 & & 10B_3 & & 5B_4 & & 5 & & \\
 & 1B_0 & & 6B_1 & & 15B_2 & & 20B_3 & & 15B_4 & & 6B_5 & & 6 & \\
1B_0 & & 7B_1 & & 21B_2 & & 35B_3 & & 35B_4 & & 21B_5 & & 7B_6 & & 7
\end{array}
$$

これらの各段を次のように等号で結びます。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1B_0 & = & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1B_0 & + & 2B_1 & = & 2 & & & & & \\
 & & & & 1B_0 & + & 3B_1 & + & 3B_2 & = & 3 & & & & \\
 & & & 1B_0 & + & 4B_1 & + & 6B_2 & + & 4B_3 & = & 4 & & & \\
 & & 1B_0 & + & 5B_1 & + & 10B_2 & + & 10B_3 & + & 5B_4 & = & 5 & & \\
 & 1B_0 & + & 6B_1 & + & 15B_2 & + & 20B_3 & + & 15B_4 & + & 6B_5 & = & 6 & \\
1B_0 & + & 7B_1 & + & 21B_2 & + & 35B_3 & + & 35B_4 & + & 21B_5 & + & 7B_6 & = & 7
\end{array}
$$

この式によって、順次ベルヌーイ数
$B_0 = 1, B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0, B_8 = -\frac{1}{30}, \cdots$
が得られます。
上の（1）式から、$S_k(n)$ は、次のように書けることが分かります。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & 1B_0n & = & 1S_0(n) & & \\
 & & & & & & & & 1B_0n^2 & + & 2B_1n & = & 2S_1(n) & & \\
 & & & & & & 1B_0n^3 & + & 3B_1n^2 & + & 3B_2n & = & 3S_2(n) & & \\
 & & & & 1B_0n^4 & + & 4B_1n^3 & + & 6B_2n^2 & + & 4B_3n & = & 4S_3(n) & & \\
 & & 1B_0n^5 & + & 5B_1n^4 & + & 10B_2n^3 & + & 10B_3n^2 & + & 5B_4n & = & 5S_4(n) & & \\
1B_0n^6 & + & 6B_1n^5 & + & 15B_2n^4 & + & 20B_3n^3 & + & 15B_4n^2 & + & 6B_5n & = & 6S_5(n) & & \\
\end{array}
$$

$$
1B_0n^7 + 7B_1n^6 + 21B_2n^5 + 35B_3n^4 + 35B_4n^3 + 21B_5n^2 + 7B_6n = 7S_6(n)
$$

これに、ベルヌーイ数
$B_0 = 1, B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0, B_8 = -\frac{1}{30}, \cdots$
を順次代入すると

$$
\begin{gathered}
0 \\
1n = 1S_0(n) \\
1n^2 + 2\frac{1}{2}n = 2S_1(n) \\
1n^3 + 3\frac{1}{2}n^2 + 3\frac{1}{6}n = 3S_2(n) \\
1n^4 + 4\frac{1}{2}n^3 + 6\frac{1}{6}n^2 + 0 = 4S_3(n) \\
1n^5 + 5\frac{1}{2}n^4 + 10\frac{1}{6}n^3 + 0 + 5\left(-\frac{1}{30}\right)n = 5S_4(n) \\
1n^6 + 6\frac{1}{2}n^5 + 15\frac{1}{6}n^4 + 0 + 15\left(-\frac{1}{30}\right)n^2 + 0 = 6S_5(n) \\
1n^7 + 7\frac{1}{2}n^6 + 21\frac{1}{6}n^5 + 0 + 35\left(-\frac{1}{30}\right)n^3 + 0 + 7\frac{1}{42}n = 7S_6(n)
\end{gathered}
$$

が得られます。

これを整理して。

$$
\begin{gathered}
0 \\
1n = S_0(n) \\
\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = S_1(n) \\
\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = S_2(n) \\
\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + 0 = S_3(n) \\
\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + 0 - \frac{1}{30}n = S_4(n) \\
\frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 + 0 - \frac{1}{12}n^2 + 0 = S_5(n) \\
\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + 0 - \frac{1}{6}n^3 + 0 + \frac{1}{42}n = S_6(n)
\end{gathered}
$$

が得られます。段数を増やしていけば、どこまでも $S_k(n)$ を求めることができます。

11　関孝和によるベルヌーイ数の計算方法

6章の注にベルヌーイ数がベルヌーイによって発表された前年の１７１２年に日本の和算家、関孝和がベルヌーイ数について発表しているということを書きました。
ここでは、関孝和の遺稿集「括要算法」に関数（せきすう）、すなわち、ベルヌーイ数がどのように導かれているかを見てみましょう。
関は、上でいう $S_k(n)$ を求める問題を扱いました。かれは、この問題に、だ積術[3]という名前を付けました。
自然数のｎ乗の数列を方だといいました。

圭だ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
方だ	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	$\cdots$
立方だ	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	$\cdots$
三乗方だ	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000	$\cdots$
四乗方だ	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049	100000	$\cdots$

さらに、この数列の和をだ積と呼びました。

圭だ積	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	$\cdots$
方だ積	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	$\cdots$
立方だ積	1	9	36	100	225	441	784	1296	2025	3025	$\cdots$
三乗方だ積	1	17	98	354	979	2275	4676	8772	15333	25333	$\cdots$
四乗方だ積	1	33	276	1300	4425	12201	29008	61776	120825	220825	$\cdots$

このだ積をどこまでも求めることができる式（関数）を作る術をだ積術と名付けたのです。この関数の係数を決定する方法として、関は累裁招差の法（るいさいしょうさのほう）と呼ばれる方法を使っています。
定数項のない x の関数 $y = f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x$ に対して、

限数	限積	定積	平積	立積	三乗積	$\cdots$
x_1	$f(x_1)$	$z_1 = \dfrac{f(x_1)}{x_1}$	$\delta y_1 = \dfrac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}$	$\delta^2 y_1 = \dfrac{\delta y_2 - \delta y_1}{x_3 - x_1}$	$\delta^3 y_1 = \dfrac{\delta^2 y_2 - \delta^2 y_1}{x_4 - x_1}$	
x_2	$f(x_2)$	$z_2 = \dfrac{f(x_2)}{x_2}$	$\delta y_2 = \dfrac{z_3 - z_2}{x_3 - x_2}$	$\delta^2 y_2 = \dfrac{\delta y_3 - \delta y_2}{x_4 - x_2}$	$\delta^3 y_2 = \dfrac{\delta^2 y_3 - \delta^2 y_2}{x_5 - x_2}$	
x_3	$f(x_3)$	$z_3 = \dfrac{f(x_3)}{x_3}$	$\delta y_3 = \dfrac{z_4 - z_3}{x_4 - x_3}$	$\delta^2 y_3 = \dfrac{\delta y_4 - \delta y_3}{x_5 - x_3}$	$\delta^3 y_3 = \dfrac{\delta^2 y_4 - \delta^2 y_3}{x_6 - x_3}$	
x_4	$f(x_4)$	$z_4 = \dfrac{f(x_4)}{x_4}$	$\delta y_4 = \dfrac{z_5 - z_4}{x_5 - x_4}$	$\delta^2 y_4 = \dfrac{\delta y_5 - \delta y_4}{x_6 - x_4}$	$\delta^3 y_4 = \dfrac{\delta^2 y_5 - \delta^2 y_4}{x_7 - x_4}$	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	

を作ると、１次式では、$z_1 = z_2 = z_3 = \cdots$ となり、この定数が１次の係数 a_1 をあらわし、二次式では $\delta y_1 = \delta y_2 = \delta y_3 = \cdots$ となり、この定数が２次の係数 a_2 を表します。
一般に、n 次式では $\delta^{n-1}y_1 = \delta^{n-1}y_2 = \delta^{n-1}y_3 = \cdots$ となり、この値が n 次の係数 a_n を表します。すると、$f(x) - ax^n$ は、$n-1$ 式になりますから、また、限積、定積、平積、立積、三乗積、$\cdots$ を作って計算すると、$n-1$ 次の係数を知ることができます。こ

[3]だ積術のだは、土へんに上に乃、下に木という字を書きます。このあとに出てくる、圭だ、方だなどのだも同じ字を書きます。