

一次関数と二次関数

第1部 一次関数

1、変化をしらべる

問題1

- ① この物体Aは()秒間に()cm進んだ。
この物体 A は()秒間に何cm進むか。
- ② この物体 B は()秒間に()cm進んだ。
この物体 B は()秒間に何cm進むか。

まとめ

物体 A のような速さの変わらない運動を等速運動という。
これからは A のような等速運動について調べていく。

次の表はある等速運動をする物体 A について、はかり始めてからの時刻を x 秒、基準点からの位置を y cm として、表にしたものです。

表 1

x秒	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ycm	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43

このような時刻と位置の表をながめているだけではその規則性はわからない。そこで、このような変化を調べるための道具を用意する。

問題1

- ① x が5秒から8秒に変わった。時刻の変化(時間)は何秒か。
- ② y が19cmの位置から28cmの位置に変わった。
位置の変化(距離)は何cmか。

まとめ

変化をしらべるには どれだけ変わったかという量を問題にしなければならない。
 x の増加分を Δx
 y の増加分を Δy とあらわす。(Δ はギリシャ文字でデルタと読む)

練習 つぎの Δx や Δy をもとめなさい。

- ① x が2から6に変わった。 $\Delta x =$
- ② y が7から12に変わった。 $\Delta y =$
- ③ y が19から8に変わった。 $\Delta y =$

それでは変化を調べる道具 Δx と Δy をつかって、表1の変化の規則をしらべてみる。
 問題2 2秒おきに変化を調べてみよう。

$$\Delta x = \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square$$

x秒	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ycm	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43

$$\Delta y = \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square$$

こんどは1秒おきに変化を調べてみよう。

$$\Delta x = \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square$$

x秒	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ycm	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43

$$\Delta y = \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square$$

まとめ

等速運動では

問題3 つぎの2つの等速運動はどちらが速い運動といえるか。

A $\Delta x=3$ のとき $\Delta y=15$ (3秒間に15cm進む)

B $\Delta x=5$ のとき $\Delta y=20$ (5秒間に20cm進む)

まとめ

速さをくらべるには
 このことを Δ をつかってあらわすと

等速運動の速さは 距離÷時間であらわすが、このことを Δ であらわした

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ を変化率という。}$$

練習 つぎの変化率を求めなさい。

- ① $\Delta x=3$ のとき $\Delta y=2$
- ② $\Delta x=2$ のとき $\Delta y=-6$
- ③ ある等速運動が2秒後に4cm、6秒後に16cmの位置にあった。

2、一次関数の定義と式

ともなって変化する2つの量があるとき、変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{一定}$ の関数を一次関数とよぶ。変化率が一定なので、一次関数はあるxに対するyの値が一組わかれば、変化の様子がすべてわかる。

問題4 5cm/秒の等速運動をする物体がある。3秒後の位置が4cmだったとき、この運動を表す次の表を完成させなさい。

$$\Delta x = \square \square \square \square \square \square \square$$

x秒				3					
ycm				4					

$$\Delta y = \square \square \square \square \square \square \square$$

このように与えられたxとyの組を初期条件という。一次関数は変化率と初期条件で決まる。次にその式を求めてみる。

問題5 変化率3、初期条件(2, 5)である一次関数について、つぎの問いに答えなさい。

x秒		2		x
ycm		5		y

① xが2からxにかわり、yが5からyに変わったと考えて Δx 、 Δy を求めよ。

② 変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ を表す式を求めよ。

問題6 初期条件(p, q) 変化率aの一次関数の式を求めよ。

これを一次関数の標準形という。

練習 次のような一次関数の式を求めよ。

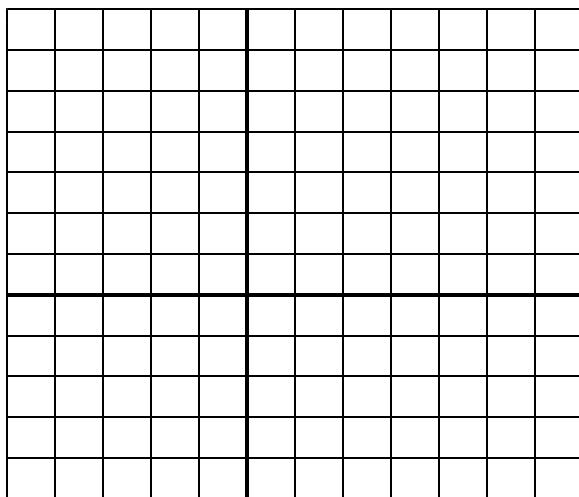
① 速さ4cm/秒の等速運動がある。7秒後の位置が12cmだった。

② $x=3$ のとき $y=7$ 、変化率が $\frac{2}{3}$

③ $x=-2$ のとき、 $y=-3$ 、変化率 -4

④ 初期条件(2, -4) 変化率 $\frac{1}{2}$

問題7 初期条件(1, 3) 変化率2の一次関数のグラフを書きなさい。



練習 次の一次関数のグラフを書きなさい。

① $y-2=3(x-1)$ ② $y-1=-2(x-3)$ ③ $y+2=\frac{1}{2}(x+3)$

問題8

ある等速運動が2秒後に7cm、5秒後に9cmの位置にあった。この等速運動を表す一次関数の式を求めよ。

$$\Delta x =$$

$$\Delta y =$$

変化率は

初期条件は

問題9

ある一次関数のグラフが、2点(3, 4)、(7, 1)を通るとき、この一次関数の式を求めよ。

練習

- ① ある等速運動が1秒後に5cm、4秒後に11cmの位置にあった。この等速運動を表す一次関数の式を求めよ。

- ② ある一次関数のグラフが、2点(2, 5) (5, 14)を通るとき、この一次関数の式を求めよ。

- ③ ある一次関数のグラフが、2点(3, 4) (7, 6)を通るとき、この一次関数の式を求めよ。

3. 一次関数の一般形

問題10

水の出る速さが5 l/分の蛇口でお風呂の水をいれる。測り始めたときすでに7 lの水が入っていた。このときの一次関数の式を求めよ。

変化率は

初期条件は

問題10

この形を一般化すると 変化率 a 初期条件 $(0, b)$ の一次関数の式は

これを、一次関数の一般形という。

練習 次の一次関数の式を一般形で求めよ。

- ① 変化率2 初期条件 $(0, 4)$

- ② 変化率3 初期条件 $(7, 12)$

- ③ 変化率 -2 初期条件 $(3, 4)$

- ④ 変化率 $2/3$ 初期条件 $(4, 2)$

問題11 次の一次関数のグラフを書きなさい。

① $y=2x+3$

② $y = \frac{1}{3}x - 2$

③ $y=-2x-1$

問題12 次のような一次関数の式を一般形で求めよ。

① ある等速運動が2秒後に5cm、6秒後に17cmの位置にあった。

② ある一次関数のグラフが、2点(1、4)、(6、14)を通る。

③ ある一次関数のグラフが、2点(3、-2)、(7、-10)を通る。

④ 一次関数のグラフが2点(2、4)、(5、6)を通る。

第2部 2次関数

0、ものの落ちる速さ

問題1 ここに大小2つの小石があります。大きい方は g で小さい方は g です。

この2つの小石を50cmくらいのところから同時に落としたらどちらの方が速く落ちると思いますか。

- ア) 小さい石の方
- イ) 大きい石の方
- ウ) ほとんど同時

問題2 こんどはピンポン玉と消しゴムを同じ50cmほどの高さから落としてみます。どちらが速く落ちると思いますか。

- ア) ピンポン玉
- イ) 消しゴム
- ウ) ほとんど同時

問題3 こんどはピンポン玉と消しゴムを2mほどの高さから落としてみます。どちらが速く落ちると思いますか。

- ア) ピンポン玉
- イ) 消しゴム
- ウ) ほとんど同時

問題4 こんどはピンポン玉と消しゴムを10mほどの高さから落としてみます。どちらが速く落ちると思いますか。

- ア) ピンポン玉
- イ) 消しゴム
- ウ) ほとんど同時

1、変化を調べる

落下運動の変化の様子を調べるために、ここで 最初に行った物体 B の方の運動をもう一度見てみよう。

次のデータはある斜面のボールの運動を記録したものである。このデータをもとに、斜面のボールの運動の様子を調べてみよう。

表1

x秒	0	1	2	3	4
ycm	0	30	120	270	480

問題1 $\Delta x=1$ として1秒おきの変化を調べてみよう。

$\Delta x=$

x秒	0	1	2	3	4	5	6
ycm	0	30	120	270	480	750	1080

$\Delta y=$

問題2 30cmを1目盛とした表をつくり、 $\Delta x=1$ として Δy を求めなさい。

$\Delta x=$

x秒	0	1	2	3	4	5	6
y 目盛	0	1					

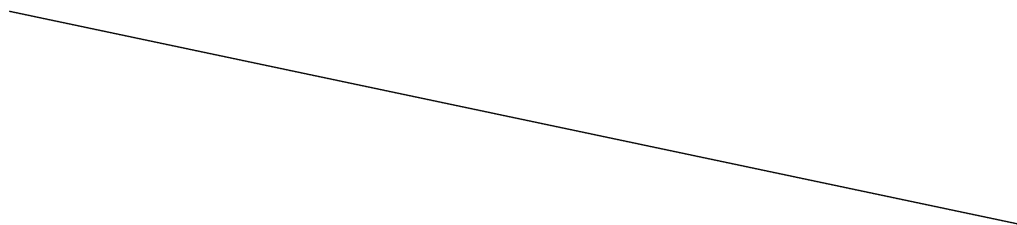
$\Delta y=$

このように斜面の運動は Δx が一定のとき

Δy は

変化する。

問題3 30cmを1目盛としたときの変化の様子を下の図に書き入れなさい。
 また、スタートからの位置の変化を図に書き入れなさい。



問題4 それではx秒後の位置をy目盛とするとき、この運動を式で表してください。

問題5 地球上で物体を落下させ、x秒後の落下距離をymとすると、
 およそ $y=5x^2$ と表されることが知られている。

①この関数を表で表しなさい。

$\Delta x =$

x秒	0	1	2	3	4	5	6
ym							

$\Delta y =$

② $\Delta x = 1$ のときの Δy の値を求めよ。

まとめ $y = ax^2$ と表される関数は $(0, 0)$ のところから $\Delta x = 1$ のとき
 Δy は と変化する。

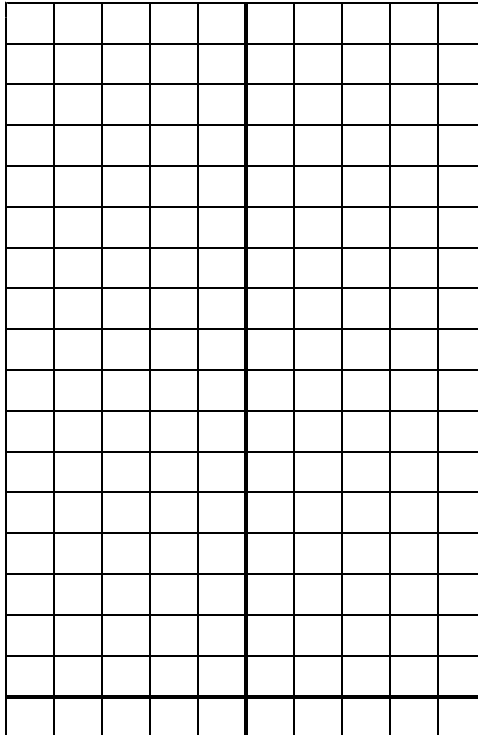
2、2次関数のグラフ

まず最も簡単な $y=x^2$ のグラフを書いてみよう。

x の負の値も含めたいろいろな値に対する y の値を求めてみる。

x	-1	0	1	2	3	4	5
y		0					

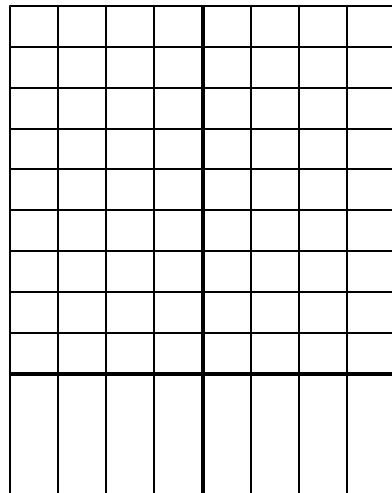
問題5 $y=x^2$ のグラフを書いてみよう。



$y=x^2$ のグラフは(0, 0)の点からスタートして
 $\Delta x=1$ のとき、 Δy は 1, 3, 5...と変化する。
 さらに x の負の値に対しては、 $x=0$ で対称に点
 をとればよい。

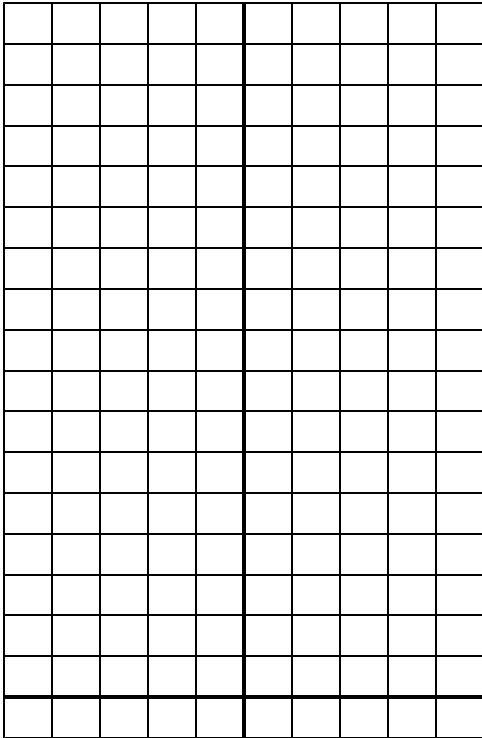
$y=ax^2$ のグラフは $\Delta x=1$ のとき、 Δy は
 1, 3, 5...に変化係数 a をかけた
 $a, 3a, 5a...$ と変化する。

また Δx をどんなに小さくとっても1, 3, 5...の割
 合で変化することは変わらないので、とくに原点
 付近で滑らかな曲線になることに注意すること。

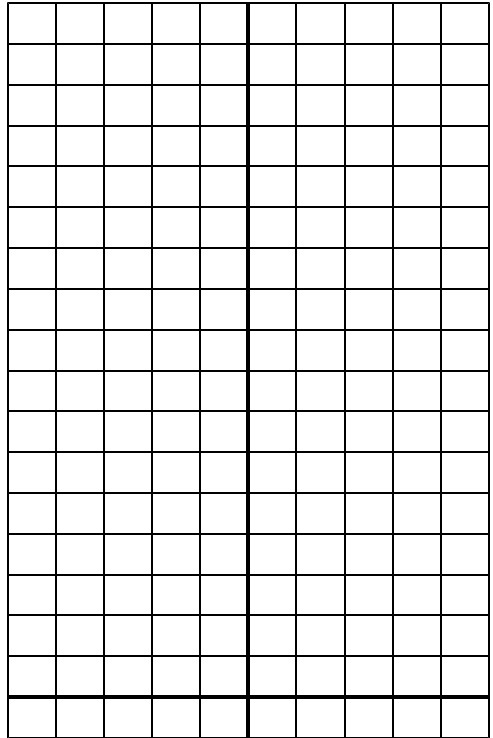


問題6 次の関数のグラフを書きなさい。

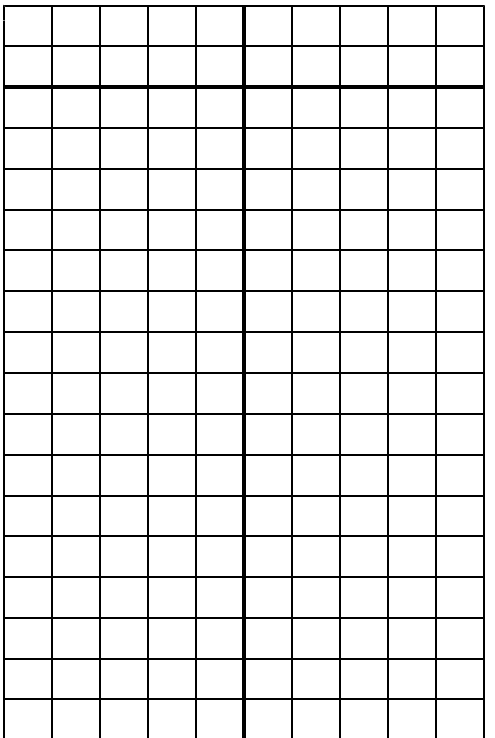
① $y = 2x^2$



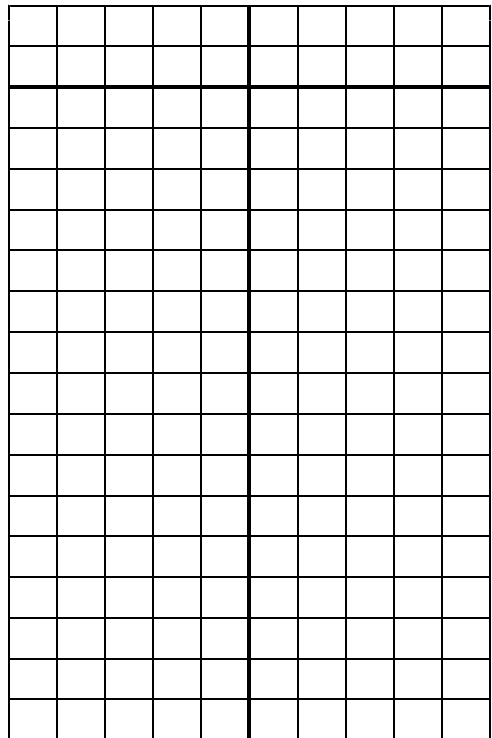
② $y = \frac{1}{2}x^2$



③ $y = -x^2$



④ $y = -2x^2$



問題7 ある斜面のボールの運動を観察すると以下の表のようになった。

$\Delta x =$

x秒	0	1	2	3	4	5	6
y m	0	1	4	9	16	25	36

$\Delta y =$

①この運動を表す式を求めよ。

②この斜面の実験を繰り返していたとき、ぼんやりしていて、時計が動き出してから3秒後に2mの位置からボールがスタートしてしまった。



同じ斜面なので Δx に対する Δy の変化の様子は同じということから、このときの表を完成しなさい。

$\Delta x =$

x秒	3				x
y m	2				y

$\Delta y =$

③スタート時点(2, 3)から(x, y)までの増加分 $x-2$ 、 $y-3$ の表をつくりなさい。

$\Delta x =$

(x-2)秒					x
(y-3) m					y

$\Delta y =$

④このときのxとyの関係を表す式をつくりなさい。

$y-3 =$

一般に p 秒後に qm の位置からスタートした斜面の運動は

$$y - q = a(x - p)^2$$

と表すことが出来る。これを2次関数の標準形と呼ぶ。

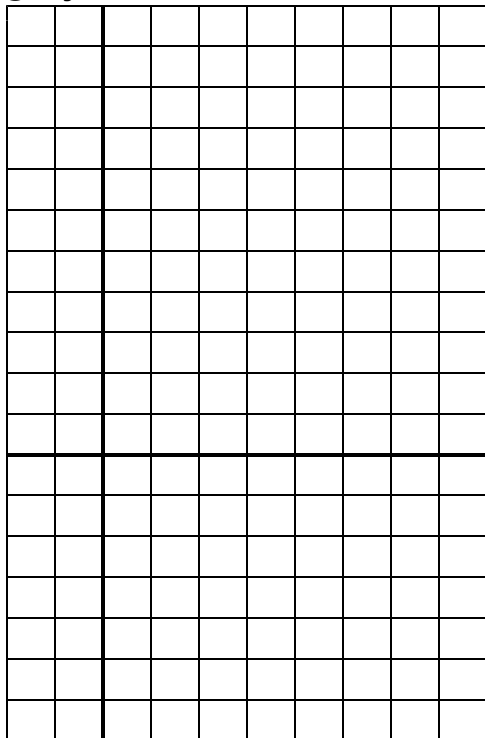
練習 つぎのような2次関数の式をつくりなさい。

① $(2, 4)$ からスタートし、 $a = 3$

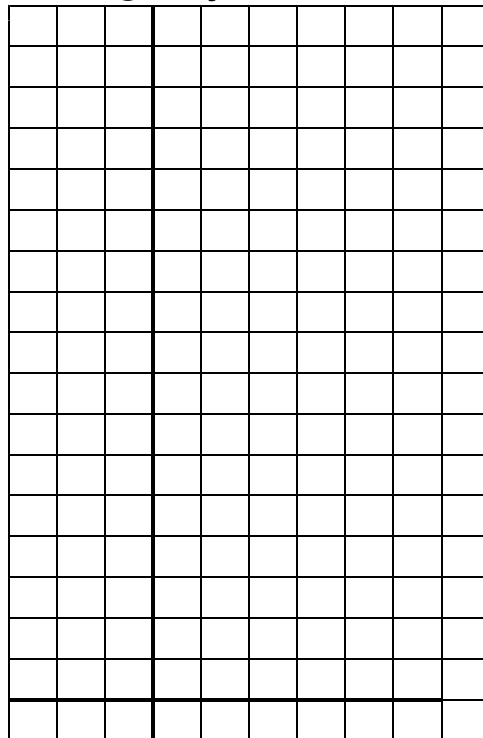
② $(-2, -3)$ からスタートし $a = -4$

問題8 次の2次関数のグラフを書きなさい。

① $y - 1 = 2(x - 3)^2$



② $y + 4 = (x - 5)^2$



このようなスタートの点を2次関数のグラフの頂点という。

練習 次の2次関数のグラフの頂点の座標をいいなさい。

① $y-7=3(x-4)^2$

② $y+2=-5(x+2)^2$

③ $y-4=(x+5)^2$

④ $y=2(x-4)^2$

問題9 二次関数 $y=2x^2-12x+23$ のグラフの頂点の座標を求めよ。