モンティー・ホール・ジレンマのコンピューターシミュレーションによる理解

成田收*

2001 年 8 月 2 日

概 要

このレポートは、モンティー・ホール・ジレンマの正解を理解する方法として、コンピューターを利用し、モンテカルロ法によりシミュレートするためのアルゴリズムを考えることが有効であることを示すものである。

1 モンティー・ホール・ジレンマとは

司会者モンティー・ホールによるアメリカのテレビ番組の中のことである。出場者の前にはは三つの部屋があり、それらすべてにドアがあるが、ドアは閉まっていて部屋の中は見えない。そのうちの一つの部屋には賞品としての車が入っている。

出場者は車の入っている部屋を当てることができたら、その車を賞品として受け取ることができる。最初にどの部屋に車が入っていると思うかを司会者にきかれるので、一つの部屋を答える。そこで、司会者は出場者が答えた部屋でもなく、車の入った部屋でもない、空の一つの部屋のドアを開けてその部屋が空であることを出場者に見せた上で、「今なら、最初の答えをかえてもいいですよ。さあどうしますか。」という。

出場者には、選択すべき道が二つある。一つは、最初の答えを変えない方法、もう一つは、司会者の申し出を受けて、答えを変える方法である。司会者が一つの部屋のドアを開けた後では、三つの部屋のドアのうち、一つは開けられ、ドアが閉まっている部屋は二つであり、一つは、最初に自分が答えた部屋であり、もう一つは、司会者の申し出によって変えてもよい部屋であるから、選べる道はこの二つの部屋のうち一つの部屋を答えることである。

*数教協会員　北海道札幌啓成高校

さてここで問題である。
確率の問題として、次のいずれが正解であろう。
（１）どちらの部屋を選んでも確率は等しい。
（２）司会者の申し出を受けて、最初の答えを変えた方が車を得る確率が高い。
（３）最初の答えを変えない方が、車を得る確率が高い。
理由を示して答えよ。

2　歴史的経緯

草思社刊「放浪の天才数学者エルデシュ」によれば、IQ が２２８でギネスブックによると最高の IQ を持つと自ら吹聴するマリリン・フォス・セイヴァントがパレード誌に連載している「マリリンにおまかせ」というコラム記事に、ある読者から送られてきた手紙に答えて、「この問題では、司会者の申し出を受けて、最初の答えを変えた方が車を得る確率が高い。最初の選択に固執していると、賞品を当てるチャンスは $\frac{1}{3}$ だが、ドアを変えると、確率は倍になり、$\frac{2}{3}$ となる。」と述べたという。さらに、読者を納得させるために、「ドアが、１００万個あると想像してみよ。あなたがドア１を選ぶと、ドアの裏には何があるかを知っていて、賞品の入っているドアを決して開けない司会者は、ドア番号７７７７７７以外のドアを全部開けるとします。そうしたらあなたは一瞬にして考えを変えることでしょう。」とのべた。この記事が書かれたのは、1990 年 9 月 9 日ということだ。

このコラム記事に、読者からたくさんの反論が寄せられたという。反論の中には数学者もたくさん含まれていた。それらの主張は、「司会者がはずれのドアを一つ開けたら、正しいドアを選ぶ確率は二つに一つ、ドアを変えようが変えまいが確率は変わらない。」というものだった。

マリリン・フォス・セイヴァントはさらに説明を試みるが、読者の反応は９対１で反論の方が多かった。多数の数学者からは、セイヴァントの説明は明らかな間違いであることの指摘や、数学的無知への嘆き、誤った知識を広げることへの叱責の内容の手紙が届いた。

しかし、現実には、セイヴァントの説明こそが正しく、多数の反論を送ってきた数学者の方が誤っていたことが明らかになった。

この問題を聞く機会のあった２０世紀を代表する天才数学者エルデシュも、モンティ・ホール・ジレンマでは間違いを犯し、モンテカルロ法によるコンピューターシミュレーションを見ても、なぜ、選択を変えた方がよいかを説明するものではないとして納得しなかったという。

3　理解が難しい点

反論の多くに見られるように、司会者が一つの空の部屋のドアを開けた段階で、残った二つの部屋のどちらに車が入っているかは確率としては等しい、と考えることに疑問を差しはさむことが難しい点にある。マリリン・フォス・セイヴァントの第２弾の記事では、読者の説得のために、起こりうる６通りの可能性についての表を載せた。(1990 年 12 月 2 日)

＜最初にドア１を選んで、そのあとも選択を変えない場合＞

ドア１	ドア２	ドア３	結果
車	空	空	車を得る
空	車	空	はずれ
空	空	車	はずれ

＜最初にドア１を選んで、そのあと選択を変える場合＞

ドア１	ドア２	ドア３	結果
車	空	空	はずれ
空	車	空	車を得る
空	空	車	車を得る

この表は、ドアを変えれば、車を当てることができるのは、３回のうち２回だし、ドアを変えなければ３回のうち１回であることを示している、と述べた。

この論理について行けば、その通りであるが、この表もまた、司会者が空の部屋のドアを開けた段階で、残った二つの部屋のどちらに車が入っているかは確率としては等しいのではないか。(エルデシュの言うとおり) なぜ、選択を変えることによって確率が変化するのかという問題に答える構造にはなっていないのではないか、と感じさせる。

また、筆者も 1993 年ころに、ある数学教育の研究会でこの問題と、その解答のみをきく機会があり、司会者のすすめにしたがって回答を変えた方が有利であるというその結論をにわかには信じることができず、ずっと疑問に思っていた。今回、2000 年道数協の冬期研で真鍋さんの報告に同じ問題が扱われたため、もう一度考えてみることとした。この問題は、問題の意味自体は明白で、その問題の性質上、モンテカルロ法を適用するのに適していることから、理解の助けになることを期待し、シミュレーションをしてみることにした。

4　コンピューター・シミュレーションの設計の概略

設計と言うほどのことはない。どの言語を使うかという問題があったが、今回は Basic を使った。設計の概略は次のようなものである。

n 部屋があり、

そのうち 1 つの部屋に車が入っていることとし、

出場者は１部屋のみを答える権利があり、
司会者は空のm部屋を空けてみせる。
出場者は、その後、回答を変更して他の１部屋を答えてよいこととする。
コンピューターの疑似乱数発生メカニズムを信じることとして、次の手順によればよい。
（1）最初に、コンピューターに車を入れておく部屋を決めさせる。
（2）次に、出場者が選ぶ部屋を決めさせる。
（3）次に、司会者が空ける部屋を決めさせる。
（4）次に、出場者が回答を変更する場合にはその部屋を決めさせる。
これらの手続きを一サイクルとして、何度も同じことをさせてみて、実際回答を変更した場合と、しなかった場合との当たる回数を調べればよいことになる。

5　コンピューター・シミュレーションの設計

簡単にできると思った実際のプログラムの作成は、思わぬところで難航した。この難航した点が、そのまま、この問題の確率を理解する重大なヒントとなった。

（1）最初に、コンピューターに車を入れておく部屋を決めさせる。（2）次に、出場者が選ぶ部屋を決めさせる。この二つの操作は単純明快である。
(A）第一段階
n 部屋に対応する配列変数 a(n) を宣言して、1 から n の乱数を発生させそれを i とすると変数 a(i) のなかみを 1 とする。他は 0 とする。
あとで、
a 001000 などと表示させる。
すると、これだけで 3 番目の部屋に車が入っていることがわかる仕組みだ。
(B）第二段階
n 部屋に対応する配列変数 b(n) を宣言して、
1 から n の間の乱数を発生させそれを i とすると変数 b(i) のなかみを 1 とする。他は 0 とする。
あとで、
b 010000 などと表示させる。
すると、これだけで 2 番目の部屋を出場者が最初に回答したことがわかる仕組みだ。

(C）第三段階
（3）司会者が空ける部屋を決めさせる。ドアを開ける部屋を決めさえすればよいのであるが、これが（1）（2）段階のように単純ではない。司会者は、車の入っている部屋を知っている。さらに、出場者の答えた部屋を知ってい

て、そのいずれでもない部屋のドアを開けなければいけないのである。そのためには、　a の配列の何番目に 1 が入っていて、b の配列の何番目に 1 が入っているかを知っていて、そのいずれをもよけて、空の部屋の中から等しい確率で m 部屋のドアを開けなければいけないのである。これを実行する方法として、配列変数 ab(i) を新しく用意する。準備として、a が 1 かまたは、b が 1 のとき ab を 1 とする。このことにより、配列変数ab(i) には、車の入っている部屋と、出場者が最初に選んだ部屋の番号のところが 1 で他のところは 0 が入っていることになる。その上で、配列変数 ab(i) のなかで 0 の個数を数えて（それは、サイクルの初回では、$n-1$ かまたは $n-2$ であるが）変数 cn の内容とする。配列変数 c(i) を新しく用意して、１から cn の間の乱数を発生させそれを j とし、配列変数 ab(i) のなかで 0 であるものを数えていって j 番目の 0 が配列 ab の k 番目であれば、ab(k) と c(k) を 1 とする。この手続きを m 回繰り返せば、司会者がどの m 部屋を選んでドアを開けたかが、c(i) の内容が 1 になってあらわれる。すなわち、あとで、

c 000010 などと表示させる。

すると、これだけで司会者が 5 番目の部屋のドアを開けて見せたことがわかる仕組みだ。

（D）第四段階

（4）において、出場者が選ぶ部屋番号を変更する場合について考える。配列変数 bc(i) と d(i) を新しく用意して、b(i) が 1 または c(i) が 1 であるところについて bc(i) を 1 とし、他を 0 とする。すなわち、最初に出場者が選んだ部屋と司会者が空けた部屋を 1 として、変更して選べる部屋のみを 0 とする。変数 dn を用意して bc(i) のうち 0 であるものの個数を数えその数を変数 dn の内容とする。1 から dn の間の乱数を発生させ、それをj とすると、bc(i) のなかの j 番目の 0 が入っている場所を見つける。それが、k 番目だとすると、d(k) を 1 とし、他を 0 とする。あとで、

d 001000 などと表示させる。

すると、これだけで出場者が司会者の申し出を受けて、回答を 3 番目の部屋に変更したことがわかる仕組みだ。

（E）第五段階

a 001000

b 010000

c 000010

d 001000

となった段階で 3 番目の部屋に車が入っており、出場者は最初に２番目の部屋を回答し、司会者は５番目の部屋を空け、出場者は回答を変えたとすると、３番目を選んだということになる。この場合は、回答を変更したために車が当たったと言うことになる。したがって、a の 1 の位置と　b の 1 の位置が一致しているときは、回答を変えなかったために車が当たった場合なのでその

回数を数えｘに入れる。また、a の 1 の位置と　d の 1 の位置が一致しているときは、回答を変えたために車が当たった場合なのでその回数を数えｙに入れる。何度も繰り返したあとで、その回数の比 x:y を確かめることによって、確率が同じか、変化するかを見ようとするものだ。

6　コンピューター・シミュレーションのプログラム

———	—————————————	—————————————————
20	n=3:m=1	n個の部屋の中で車の入っている
30	DIM a(n):DIM b(n):	部屋は１つ。回答者はただ
	DIM c(n):DIM ab(n):	一つの部屋を答えることができる。
	DIM bc(n):DIM d(n)	司会者は回答者の指定した部屋以外で、
		空の部屋のドアをm個開ける。
50	x=0	
———	—————————————	—————————————————
60	FOR j=1 TO 10	試行を行う回数を指定
70	FOR i=0 TO n	
80	a(i)=0:b(i)=0:c(i)=0:	a は車の入っている部屋の番号、
	ab(i)=0:bc(i)=0:d(i)=0	b は回答者の１回目の答え、
		c は司会者が空ける部屋、
		d は回答者の２度目の回答。
90	NEXT	
———	—————————————	—————————————————
100	a=INT(RND*n)+1	RND は０と１の間の乱数を発生、
		これをｎ倍し、整数部分をとり、
		１を足すと、１からｎまでの自然数が
		等確率で得られる。
110	a(a)=1:ab(a)=1	ab(i) は車の入っている部屋と
		回答者の答えた部屋が１になる。
———	—————————————	—————————————————
120	b=INT(RND*n)+1	
130	b(b)=1:ab(b)=1	
140	FOR k=1 TO m	m個の空の部屋を空けます。
150	cn=0	cn は ab の配列の中の０の個数を
		数えるカウンター
160	FOR i=1 TO n	
170	IF ab(i)=0 THEN cn=cn+1	
180	NEXT	

190　c2n=0

200　c=INT(RND*cn)+1　　**1から cn の自然数を等確率で発生させる。**

210　FOR i=1 TO n

220　IF ab(i)=0 THEN c2n=c2n+1 :
IF c2n=c THEN c(i)=1:ab(i)=1　　**ab の配列の cn 番目の0を1に変える。**
同時に同じ位置の ab の配列の0を1に変える。

230　NEXT

240　NEXT　　**m回繰り返す。**

——— ————————————— —————————————————

300　FOR i=1 TO n

310　IF b(i) OR c(i)=1 THEN bc(i)=1　　**b または c が1のとき、bc 配列の**
その位置に1を入れる。
すなわち、回答者の最初の回答と、
ドアの開いた部屋は
1が入ることになる。

320　NEXT

——— ————————————— —————————————————

330　dn=0　　**dn は bc 配列の0の個数を**
数えるカウンター

340　FOR i=1 TO n

350　IF bc(i)=0 THEN dn=dn+1

360　NEXT

370　d2n=0

380　d=INT(RND*dn)+1　　**1から dn までの自然数を**
等確率で発生させそれを、
d とする。

390　FOR i=1 TO n

400　IF bc(i)=0 THEN d2n=d2n+1 :　　**配列 d の d 番目の0を1に変える。**
IF d2n=d THEN d(i)=1

410　NEXT

——— ————————————— —————————————————

420　FOR i=1 TO n

425　IF a(i) AND b(i)=1 THEN x=x+1　　**最初に回答した番号が**
当たった回数を記録。

430　IF a(i) AND d(i)=1 THEN y=y+1　　**2度目に変えた回答が当たっ**
た回数を記録する。

440　NEXT

―――	―――――――――――――	――――――――――――――――――
450	FOR i=1 TO n :PRINT a(i);:NEXT	**配列** a **を表示します。**
460	PRINT	
470	FOR i=1 TO n: PRINT b(i);:NEXT	**配列** b **を表示します。**
480	PRINT	
510	FOR i=1 TO n: PRINT c(i);:NEXT	**配列** c **を表示します。**
520	PRINT	
550	FOR i=1 TO n: PRINT d(i);:NEXT	**配列** d **を表示します。**
―――	―――――――――――――	――――――――――――――――――
560	PRINT x:PRINT	**回答を変えなかった場合** **当たった回数の累計** x **と** **回答を変えた場合当たった回数** y **を表示する。**
570	NEXT	
580	PRINT ”n=”;j-1,”x=”;x,”y=”;y	**試行回数と当たった回数を表示する。**

7　コンピューター・シミュレーションの結果

1 回目
n=3,m=1,10 回

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 0

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 0

a 0 0 1
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 0

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 0

a 0 0 1
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 0

a 0 0 1
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 1

a 1 0 0
b 0 1 0
c 0 0 1
d 1 0 0 1

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 1

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 1

a 1 0 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 2

10 回中

x=2　　y=8

2 回目
n=3,m=1,10 回

a 0 0 1
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 0

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 0

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 0

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 0

a 1 0 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 1

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 1

a 1 0 0
b 0 1 0
c 0 0 1
d 1 0 0 1

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 1

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 1

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 1

10 回中

x=1　　y=9

3 回目
n=3,m=1,10 回

a 0 0 1
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 1

a 0 1 0
b 0 1 0
c 0 0 1
d 1 0 0 2

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 2

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 2

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 2

a 0 1 0
b 0 1 0
c 0 0 1
d 1 0 0 3

a 0 0 1
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 4

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 4

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 4

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 4

10 回中

x=4　　y=6

4 回目
n=3,m=1,10 回

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 0

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 0

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 0

a 0 0 1
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 1

a 1 0 0
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 2

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 2

a 1 0 0
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 3

a 0 1 0
b 0 1 0
c 0 0 1
d 1 0 0 4

a 0 0 1
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 5

a 0 1 0
b 0 1 0
c 0 0 1
d 1 0 0 6

10 回中

x=6　　y=4

n=3,m=1
100回

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 0

a 1 0 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 1

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 1

a 0 0 1
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 2

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 2

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 2

a 1 0 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 3

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 3

a 1 0 0
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 4

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 4

a 0 0 1
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 5

a 0 0 1
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 5

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 5

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 5

a 0 0 1
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 5

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 5

a 0 1 0
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 6

a 0 1 0
b 0 1 0
c 0 0 1
d 1 0 0 7

a 1 0 0
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 8

a 0 1 0
b 0 1 0
c 0 0 1
d 1 0 0 9

a 0 0 1
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 9

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 9

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 9

a 1 0 0
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 10

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 10

a 0 0 1
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 10

a 0 1 0
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 11

a 0 0 1
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 12

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 12

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 12

a 1 0 0
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 13

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 13

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 13

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 13

a 0 1 0
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 14

a 0 0 1
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 15

a 0 0 1
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 15

a 0 0 1
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 15

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 15

a 0 0 1
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 15

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 15

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 15

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 15

a 0 0 1
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 16

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 16

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 16

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 16

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 16

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 16

a 0 0 1
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 16

a 1 0 0
b 0 1 0
c 0 0 1
d 1 0 0 16

a 0 0 1
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 17

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 17

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 17

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 17

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 17

a 1 0 0
b 0 1 0
c 0 0 1
d 1 0 0 17

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 17

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 17

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 17

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 17

a 0 0 1
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 18

a 1 0 0
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 19

a 1 0 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 20

a 0 0 1
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 20

a 1 0 0
b 0 1 0
c 0 0 1
d 1 0 0 20

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 20

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 20

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 20

a 0 0 1
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 21

a 0 1 0
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 22

a 0 0 1
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 23

a 0 1 0
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 24

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 24

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 24

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 24

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 24

a 0 0 1
b 1 0 0
c 0 1 0
d 0 0 1 24

a 0 0 1
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 25

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 25

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 25

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 25

a 0 0 1
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 26

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 26

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 26

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 26

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 26

a 0 1 0
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 27

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 27

a 0 1 0
b 1 0 0
c 0 0 1
d 0 1 0 27

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 27

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 27

a 0 0 1
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 28

a 0 0 1
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 29

a 1 0 0
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 29

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 29

a 0 1 0
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 29

a 0 0 1
b 0 0 1
c 1 0 0
d 0 1 0 30

a 0 0 1
b 0 0 1
c 0 1 0
d 1 0 0 31

a 0 0 1
b 0 1 0
c 1 0 0
d 0 0 1 31

100 回中

x=31　y=69

n=5,m=2,10 回

a 0 0 0 0 1
b 0 0 0 1 0
c 1 1 0 0 0
d 0 0 0 0 1 0

a 0 0 0 0 1
b 1 0 0 0 0
c 0 0 1 1 0
d 0 1 0 0 0 0

a 0 0 0 1 0
b 0 0 0 0 1
c 1 1 0 0 0
d 0 0 1 0 0 0

a 0 0 0 1 0
b 1 0 0 0 0
c 0 1 1 0 0
d 0 0 0 1 0 0

a 0 1 0 0 0
b 0 0 0 1 0
c 1 0 0 0 1
d 0 1 0 0 0 0

a 0 0 1 0 0
b 0 1 0 0 0
c 0 0 0 1 1
d 0 0 1 0 0 0

a 1 0 0 0 0
b 0 0 0 1 0
c 0 1 0 0 1
d 1 0 0 0 0 0

a 0 0 0 0 1
b 1 0 0 0 0
c 0 1 1 0 0
d 0 0 0 1 0 0

a 0 1 0 0 0
b 0 0 1 0 0
c 1 0 0 1 0
d 0 0 0 0 1 0

a 0 0 0 1 0
b 0 0 0 1 0
c 0 0 1 0 1
d 0 1 0 0 0 1

10 回中

x=1　y=5

8　コンピューター・シミュレーションの結果の評価

前節のシミュレーション結果で、n=10（すなわち、繰り返しの回数を 10 回）としたときを４回試みている。このうち、最初の３回は２：８，１：９，４：６，で答えを変えた方が有利であることが見て取れるが、最後の４回目は、６：４で逆に、答えを変えない方が有利であるような結果となっている。そこで、次に、回数を 100 回に増やしてみてみると、結果は、３１：６９で答えを変えた方が有利であることとなる。この結果は、何回やってみても、ほぼ安定した比におさまり、その比がほぼ、１：２であることを示す。つまり、確率は、答えを変えない場合、$\frac{1}{3}$ で、答えを変えた場合、$\frac{2}{3}$ であることを、一定程度保証するものとなっている。

また次に行っているのは、n=5,m=2　とした場合、すなわち、部屋数を５部屋、司会者が開けてみせる部屋を２部屋とした場合のシミュレーションである。この場合も、理論値 $\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$ であることをある程度反映する結果となっている。

9　シミュレーションのプログラム過程からわかること

このプログラムで出場者が最初の答えを変えない場合、賞品を得る確率は、b(i) に 1 のある位置と a(i) に 1 のある位置が一致する場合だから、$\frac{1}{n}$ であることは明らかである。このことは、同時に、司会者が空の部屋のドアを開けて見せた後か前かに関わらず、出場者が最初の答えを変えないかぎり、確率 $\frac{1}{n}$ は変化しないと言うことを表している。

また、出場者が最初の答えを変える場合は、賞品を得るのは、d(i) に 1 のある位置と a(i) に 1 のある位置が一致する場合である。d(i) の 1 は回答を変えることが前提だから、b(i) の 1 のある位置とはけっして一致しない。したがって、a(i) の 1 の位置と b(i) の 1 の位置が一致する場合を除いて d(i) の 1 の位置と a(i) の 1 の位置とが一致する可能性がある。それは、すべてあわせると、$1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$ の可能性がある。そのうち、c(i) で 1 となる m 個を除くので d(i) に 1 を置くことができる場所は $n-m-1$ か所しかない、これらの場所で、賞品を得る確率は等しいので、d(i) の 1 の位置と a(i) の 1 の位置とが一致する可能性は $\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-m-1}$ となる。$n=3, m=1$ の場合、その確率は $\frac{2}{3}$ となるし、$n=5, m=2$ の場合は $\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}$ となる。

ところで、この事情を、３回目のコラム記事（1991 年 2 月 17 日）で、セイヴァントは次のように述べたという。「司会者がドアを開けてはずれを見せたばかりのところへ UFO が番組のステージに着陸して、宇宙人がでてきたとする。出場者が最初にどのドアを選んだかを知らずに、まだ開けられてい

ないふたつのドアのどちらかを選ぶように言われたら、宇宙人が車をひき当てる確率は五分五分だ。」「しかし、それは、宇宙人が、本来の出場者が司会者から得たヒントを知らないからです。もし賞品がドア２にあるなら、司会者はドア３を開けます。そして、ドア３にあるなら、ドア２を開けるでしょう。だから、賞品がドア２かまたは３にあるなら、出場者がドアの選択を変えれば、勝てます。『どちらかで勝てるのです』でも、ドアを変えなければ、ドア１に賞品がある場合しか勝てません。」その通りで、この場合の条件付き確率を考えるに当たって、司会者が、ひとつの空の部屋を開けて、残りのドアが２つになったという条件の下での条件付き確率は $\frac{1}{2}$ であるが、司会者は、出場者が選んだ部屋を決して開けず、空の部屋を一つ開けたという条件の下での出場者が最初に選ばなかった方に車が入っている条件付き確率は $\frac{2}{3}$ なのである。

10　教材としての構想

新川高校の清水貞人氏が、１年生から２年生になる春休みの春期講習参加者７３名にこの問題を提示した結果が次の資料である。最初の報告では、生徒の感想がなく、教師の感想が「多くの生徒が、大変よく納得した。」というものであった。したがって、この問題を、単なる練習問題として、解法を納得してしまったようで、少々もったいない、というのが私の感想であった。この問題は、かえって、解答のみを伝えてその理由については人生の長い時間をかけて楽しむのがふさわしいと考えた。したがって、教材としてどのように扱うかは難しい問題の一つと考えた。

しかし、今回、生徒の感想をきくことができた。やはりまだ納得していない生徒もたくさんいて、これからも、この問題を心の底に抱えながら、楽しんでいけるのではないかと思える結果であった。したがって、この問題は、普通に、内容豊かな問題を扱うときと同様に扱っていけるのではないかと考えている。さらに、条件付き確率の考え方に慣れたころで扱うと効果的ではないかと考えているが、現在のカリキュラムでは、条件付き確率がめったに扱われなくなってしまったために、本当に効果的な学習の機会が奪われているのも残念である。ここは、１年生の確率の最後に、条件付き確率を自主編成で指導した後、モンティー・ホールジレンマの問題を扱うのがよいのではないかと考えている。

賞金の問題について

清水貞人（札幌新川高校）

真鍋さんが紹介してくれた「賞金の問題」を、春期講習に参加した７３人に一晩考えて来てもらいました。私の上手な説明に多くの生徒がころっと騙されて（？）しまったようでしたが、疑問を持ち続けている生徒も少なからずいます。「取り替えない場合 $\frac{1}{3}$ で当たる。取り替える場合はずれるのは、最初に当たりを引いたときなので $1-\frac{1}{3}$ より $\frac{2}{3}$ で当たる。よってとり替えた方が得である。」と説明した生徒が２人いたのには驚きました。

＜生徒の予想＞

1. とり替えた方が得である。（２４人）
2. とり替えない方が得である。（２人）
３．どちらも同じである。（４７人）

＜生徒の感想＞

１．賞金の問題は、まだどうも諦めがつかない。
２．納得はできたが、何となく騙されているような気分になった。
３．難しくてまだ少し疑問が残った。
４．賞金の問題は不思議だった。
５．まだ何か考えがあると思います。
６．賞金の問題は「なるほど」と思った。
７．間違っていたけれど納得できた（面白かった）。
８．自分で考えていた答えと異なって、とても興味深かった。
９．自分で答えを考えて納得することができた。
１０．よく考えるとそうだなと納得できた。
１１．このように面白い問題は今後もやりたいなあと思う。
１２．面白かった。言われてみればそんな簡単なことだったのかと思った。