数列をどう教えるべきか？

立命館慶祥中学校・高等学校
非常勤講師　渡邊　勝　（2004 年）

0. 問題意識

ある生徒から「数列の種類は、等差数列、等比数列、階差数列の 3 種類ですよね」と確認を求められ、返答に一瞬戸惑った。

この質問をした生徒は、階差数列が、原数列の一般項を求める為に用いられる技法の一つでしかないという一般の生徒の認識よりは、一歩抜き出 た観点を持っている。にも拘わらず、私はじめ教師達が、彼に数列の全体像を示しえていないことがこの質問をなさしめたのであろう。

さて、この質問にどのように整理して解説したら良いか、　私が思いついたのは次のようなものであった。

関数　←→　導関数
↑↓　　　　↑↓
数列　←→　階差数列

あらためて、数列を整理し直し、体系的に捉える視点を考察したいと思う。

① 数列とは何か。定義域が離散的な関数である。関数値を列挙したもので表現する。
② その解析のために、微分法と同じ位置にある差分法を用いる。もし、このことが意識されずに、原数列の一般項を求めるだけで階差数列が出 て、所謂「一般項の求め方」の公式になる。
③ 差分と対をなす和分をしっかり意識させる。

1. 数列とは何か。

(1)　関数である。その定義域は 0 以上の正の整数である。

従来、教科書では、定義域は、$n = 1$ から始めている。

日本では、自然数は 1 から始まるが、西欧では、自然数は 0 を含める。

(エレヴェータの表示は、0, 1, 2, 3 とあるのは、日本的には 1 階、2 階、3 階、4 階の意味である。)

西語；1 階；*bajo*(バーホ)、2 階；*primer piso*(プリメール ピソ)、3 階；*segundo piso*(セグンド ピソ)、4 階；*tercero piso*(テルセーロ ピソ)

この際全ての数列の定義域を $n = 0$ から始める。

(2)　独立変数 n に対応する関数値を $p(n)$ のように表す。従来の a_n である。これによって、n の関数であることがより明らかになる。

p は、*progression*／ﾌﾟﾗｸﾞﾚｯｼｮﾝ／進行、前進、数列の頭文字。

(3)　連続関数の数式表現と符節を一致させるために、つぎのようにする。

$p(1)$ 即ち a_1 を初項と言っていたが、$p(0)$ 即ち a_0 を 「原項」と名付ける。

例　$p(n) = 2n + 1$　即ち　$\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$
　　$p(n) = 2n - 1$　即ち　$\{-1, 1, 3, 5, \cdots\}$
　　$p(n) = 2n$　　即ち　$\{0, 2, 4, 6, \cdots\}$

$p(n) = 2^n$　　　即ち　$\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\}$

この結果、数列と連続関数の対応が分かりやすくなる。

　等差数列；$p(n) = d\cdot n + p(0)$：一次関数；$y(x) = ax + y(0)$

　$p(n) = d(n-1) + p(1)$　と比較すると、上の式がすっきりしてい る。

　等比数列；$p(n) = p(0)\cdot r^n$：指数関数；$y(x) = y(0)\cdot a^x$

　$p(n) = p(1)\cdot r^{n-1}$　と比較するとよい。

同じ趣旨の提案をしている人は、埼玉の武田利一さん。これとは独立に北大の須田勝彦先生が夙に提唱しておられる。

岐阜の亀井喜久男さんは、「原項」の命名者である。

2. 和分の導入

$\Sigma\, p(n) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + \cdot\cdot\cdot + p(n)$

これを数列の和分（単に「和」）と呼ぶ。原項から第 n 項まで、$n+1$　個ある。

従来の　$\sum_{k=0}^{n} k$　と同じである。

例(1.1)　$p(n) = n$　のとき　$\Sigma\, p(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$　即ち　$\Sigma\, n = \frac{1}{2}n(n+1)$

例(1.2)　$p(n) = n^2$　のとき　$\Sigma\, p(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　即ち

$$\Sigma\, n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

例(1.3)　$p(n) = n^3$　のとき　$\Sigma\, p(n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$　即ち　$\Sigma\, n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

例(2)　　$p(n) = d$（定数）のとき　$\Sigma\, p(n) = (n+1)d$　即ち　$\Sigma\, d = (n+1)d$

例(3)　$p(n) = r^n$（$r \neq 0$、$r \neq 1$　のとき）$\Sigma\, p(n)$

$$\text{即ち}\quad \Sigma\, r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

（証明）

$\Sigma\, p(n) = r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \cdot\cdot\cdot + r^n$　（項数が $n+1$ 個あることに注意）

両辺に $(1-r)$ を掛ける。

$(1-r)\{\Sigma\, p(n)\} = 1 - r^{n+1}$

（証明終）

和分の線型性

$\Sigma\{a\cdot p_1(n) + b\cdot p_2(n)\} = a\,\Sigma\, p_1(n) + b\,\Sigma\, p_2(n)$（$a,\ b$　は、実数の定数）

(簡単に証明できるが、省略)

例(1.1)　$p(n) = 2n$　のとき

$\Sigma\, p(n) = \Sigma\, 2n = 2\,\Sigma\, n = n(n+1)$

例(1.2)　$p(n) = 2n+1$　のとき

$\Sigma\, p(n) = \Sigma(2n+1) = 2\,\Sigma\, n + \Sigma\, 1 = n(n+1) + (n+1) = (n+1)^2$

例(2)　$p(n) = 3\cdot 2^n$　のとき

$$\Sigma\ 3\ 2^{n}=3\Sigma\ 2^{n}=3\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=3(2^{n+1}-1)$$

3. 差分の導入

$\Delta\ p(n)=p(n+1)-p(n)$　　$(n=0, 1, 2, 3, \cdots, n)$

これを数列 $p(n)$ の差分とよぶ。差分は、原数列から導来された新たな数列である。

この関数値を並べたものが階差数列である。

例(1.1)　$p(n)=n$　のとき

$\Delta\ p(n)=p(n+1)-p(n)=(n+1)-(n)=1$

比較；$y(x)=x \ \Rightarrow\ y'(x)=1$

例(1.2)　$p(n)=n^2$　のとき

$\Delta\ p(n)=p(n+1)-p(n)=(n+1)^2-n^2=2n+1$

比較；$y(x)=x^2 \ \Rightarrow\ y'(x)=2x$

例(1.3)　$p(n)=n^3$　のとき

$\Delta\ p(n)=p(n+1)-p(n)=(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$

比較；$y(x)=x^3 \ \Rightarrow\ y'(x)=3x^2$

なお、　n から始まり、1 ずつ小さい数を r 個並べたものを

$n(r)=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-[r-1])$　と定義すると、

$\Delta\ n(r)=r\,n(r-1)$　という定理もある。

例(3)　$p(n)=r^n$　$(r\neq 0$、$r\neq 1)$　のとき

$\Delta\ p(n)=p(n+1)-p(n)=r^{n+1}-r^n=r^n(r-1)=p(n)(r-1)$

比較；$y(x)=e^x \ \rightarrow\ y'(x)=e^x=y(x)$

差分の線型性

$\Delta\{a\cdot p_1(n)+b\cdot p_2(n)\}=a\ \Delta\ p_1(n)+b\ \Delta\ p_2(n)$　（a, b　は、実数の定数）

例(1)　$p(n)=d\cdot n+p(0)$　のとき

$\Delta\ p(n)=d\ \Delta\ n+\Delta\ p(0)=d\cdot 1+0=d$　（定数関数）

比較；$y(x)=ax+y(0) \ \rightarrow\ y'(x)=a$

例(2.1)　$p(n)=3\cdot 2^n$　のとき

$\Delta\ p(n)=3\cdot\Delta(2^n)=3\cdot(2-1)2^n=3\cdot 2^n$

例(2.2)　$p(n)=2\cdot 3^n$　のとき

$\Delta\ p(n)=2\cdot\Delta(3^n)=2\cdot(3-1)3^n=4\cdot 3^n$

4. 和分と差分の関係

例(1.1)　$p(n)=2\cdot n+1$　のとき

$\Delta\ p(n)=2$

$\Sigma\ \Delta\ p(n)=\Sigma\ 2=2(n+1)=p(n+1)-1$

$p(n+1)=\Sigma\ \Delta\ p(n)+1$

例(1.2)　$p(n)=d\cdot n+p(0)$　のとき

$\Delta\ p(n)=d$

$\Sigma\ \Delta\ p(n)=\Sigma\ d=(n+1)d=p(n+1)-p(0)$

$p(n+1)=\Sigma\ \Delta\ p(n)+p(0)$

例(2.1)　$p(n) = n^2$ のとき

$\Delta p(n) = 2n + 1$

$\Sigma \Delta p(n) = \Sigma (2n + 1) = 2 \Sigma n + \Sigma 1 = n(n + 1) + (n + 1) = (n + 1)^2$

$= p(n + 1)$

$p(n + 1) = \Sigma \Delta p(n)$

例(2.2)　$p(n) = n^3$　のとき

$\Delta p(n) = 3n^2 + 3n + 1$

$\Sigma \Delta p(n) = \Sigma \{3n^2 + 3n + 1\} = 3 \Sigma n^2 + 3 \Sigma n + \Sigma 1$

$= 3\{1/6 \cdot n(n + 1)(2n + 1)\} + 3\{1/2 \cdot n(n + 1)\} + (n + 1)$

$= 1/2\ (n + 1)\{n(2n + 1) + 3n + 2\}$

$= 1/2\ (n + 1)\{2n^2 + 4n + 2\} = (n + 1)^3 = p(n + 1)$

$p(n + 1) = \Sigma \Delta p(n)$

例(3.1)　$p(n) = 2^n$　のとき

$\Delta p(n) = 2^n$

$\Sigma \Delta p(n) = \Sigma 2^n = 2^{n+1} - 1 = p(n + 1) - 1$

$p(n + 1) = \Sigma \Delta p(n) + 1$

例(3.2)　$p(n) = r^n$　$(r \neq 0$、$r \neq 1)$　のとき

$\Delta p(n) = p(n)(r - 1)$

$p(n + 1) = \Sigma \Delta p(n) + 1$

例(3.3)　$p(n) = 2 \cdot 3^n$　のとき

$\Delta p(n) = 4 \cdot 3^n$

$$\Sigma\, 4 \times 3^n = 4\, \Sigma\, 3^n = 4 \times \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = 2 \times (3^{n+1} - 1) = p(n + 1) - 2$$

$p(n + 1) = \Sigma \Delta p(n) + 2$

一般化して

$$\boxed{p(n + 1) = \Sigma \Delta p(n) + p(0)}$$

これは、階差数列によって原数列の一般項を求める定理である。

(証明)

$p(n + 1) - p(n) = \Delta p(n)$

これに　$n = 0,\ 1.\ 2,\ 3, \cdot\cdot\cdot, n$　まで代入する。

$p(1) - p(0) = \Delta p(0)$

$p(2) - p(1) = \Delta p(1)$

$p(3) - p(2) = \Delta p(2)$

・・・

$p(n + 1) - p(n) = \Delta p(n)$

辺々を加えて

$p(n + 1) - p(0) = \Sigma \Delta p(n)$

よって、$p(n + 1) = \Sigma \Delta p(n) + p(0)$

（証明終）

また、この定理は、微積分の基本定理と対応している。

$$F(x) = \int \frac{d}{dx}F(x)\ \ dx + C$$

5. 差分方程式

例(1)　$p(n+1) = p(n) + 3n + 2$、$p(1) = 2$　⇒　$p(n) = ?$　（福岡大 01）

（解）$\Delta p(n) = 3n + 2$

$$p(n+1) = \Sigma\Delta p(n) + p(0)$$
$$= \Sigma(3n+2) + p(0)$$
$$= 3\Sigma n + \Sigma 2 + p(0)$$
$$= 3 \cdot 1/2 \cdot n(n+1) + 2(n+1) + p(0)$$
$$= 1/2 \cdot (n+1)(3n+4) + p(0)$$

$n = 0$　とおいて、　$p(1) = 1/2 \times 4 + p(0)$

これより、$p(0) = 0$

よって、$p(n+1) = 1/2 \cdot (n+1)(3n+4)$

従って、　$p(n) = 1/2 \cdot n(3n+1)$

（よくある解答例）

$a_{n+1} - a_n = 3n+2$

$a_{n+1} - a_n = b_n$　　とおく。

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k+2)$$

$$= 2 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k + 2\sum_{k=1}^{n-1} 1 = 2 + 3 \times \frac{1}{2}(n-1)n + 2 \times (n-1)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}(n-1)(3n+4) = \frac{1}{2}n(3n+1)$$

例(2)　$p(n+1) = p(n) + 3^n$、　$p(1) = 1$　⇒ $p(n) = ?$

（解）　$\Delta p(n) = 3^n$

$$p(n+1) = \Sigma\Delta p(n) + p(0)$$
$$p(n+1) = \Sigma 3^n + p(0)$$
$$= \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} + p(0) = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2} + p(0)$$

よって、　$p(n) = 1/2 \cdot (3^n - 1) + p(0)$

$p(1) = 1$、$1/2 \cdot (3^1 - 1) + p(0) = 1$、　$p(0) = 0$

したがって、　$p(n) = 1/2 \cdot (3^n - 1)$

例(3)　$p(n+1) = 2p(n) + 1$、　$p(1) = 3$　　⇒　　$p(n) = ?$　　（慶応 99）

（解） $p(1) = 2p(0) + 1$ 　より、$2p(0) + 1 = 3$ 　ゆえに　$p(0) = 1$

$\Delta p(n+1) = \Delta\{2p(n) + 1\}$

$\Delta p(n+1) = 2\Delta p(n)$

$n = 0, 1, 2, 3, \cdots, n$ 　を代入して辺々を掛ける。

$\Delta p(1) = 2\Delta p(0)$

$\Delta p(2) = 2\Delta p(1)$

$\Delta p(3) = 2\Delta p(2)$

・・・

$\Delta p(n+1) = 2\Delta p(n)$

その結果は

$\Delta p(n+1) = 2^{n+1}\Delta p(0)$

$\Delta p(n) = 2^{n}\Delta p(0)$、

$\Delta p(n) = 2^{n}\{p(1) - p(0)\}$

$\Delta p(n) = 2^{n}\{3 - 1\}$

$\Delta p(n) = 2\cdot 2^{n}$

$p(n+1) = \Sigma\Delta p(n) + p(0)$

$p(n+1) = 2\cdot\Sigma 2^{n} + p(0)$

$$= 2\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1} + p(0) = 2\times 2^{n+1} - 2 + p(0)$$

よって、$p(n) = 2^{n+1} - 1$

（よくある解答例） $a_{n+1} = 2a_n + 1$、$a_1 = 3$ 両辺に１を加える。 $a_{n+1} + 1 = 2a_n + 2$ $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ $a_{n+1} - a_n = b_n$ 　とおく。 $b_{n+1} = 2b_n$ $b_1 = a_1 + 1 = 3 + 1 = 4$ これより $\{b_n\}$ は、 初項 4，公比 2 の等比数列である。	$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 4\times 2^{k-1}$ $= 3 + 4\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}$ $= 3 + 4\times\frac{2^{n-1}-1}{2-1}$ $= 2^{n+1} - 1$ （終了）