北海道数学教育研究協議会（道数協）

高校サークル９８年１２月例会

# *あなたは経済大臣*

## 線型代数どこまでやるの？

渡邊勝（元札琴工）

１９９８年１２月２６，２７日

札幌市。あけぼの旅館

**基礎資料**

単元；数学Ｃ「行列」　、工業数理「予測と計画」－“産業連関表”

指導要領にあるもの；

１．行列の定義、相等、

２．行列の和と実数倍、零行列、行ヴェクトル、列ヴェクトル、

３．行列の積、非可換、零因子、単位行列、

４．逆行列、二次行列逆行列の公式

５．連立一次方程式、二次；逆行列の公式使用、消去法、三元一次→消去法

６．コンピュータによる行列の計算

定数倍；２×３行列、和；２×３行列、積；２×２行列、消去法；三元連立

必要とされる予備知識；上記１～４

この指導案で上記以外に準備するもの

１．転置行列；定義

２．転置行列の逆行列　　　　＊要点参照

**この指導案の特徴点**

①　「掃き出し法」を操作だけに終わらせないで、行列と対応させた。

②　「掃き出し法」によって、逆行列も算出できることを示した。

③　二次行列の場合も、逆行列の公式を使わないで、掃き出し法を徹底する。

④　普通高校では扱わない産業連関表＝投入産出表をとりあげた。

⑤　「あなたは経済大臣」の節を設けて、産業連関表をシュミレーションの材料とした。

# 産業連関表の歴史

１．フランソワ・ケネー；Francois　Quesnay（1694～1774年）

ポンパドール侯爵夫人（渡邊勝氏の高校時代一コ下のマドンナＩ．Ｎ嬢に似ている）の侍医、

ルイ十五世の侍医、「百科全書」に執筆、

１７５８年に「経済表」初版を印刷。（岩波文庫－白４３）

重農学派；重商主義によって疲弊させられた農村の復興、

農業が富の源泉：商工業は不生産的、

自然法の思想

２．カール．マルクス；Karl　Marx（1818～1883年）

マルクスは経済表（範式）を評して、次のように述べている。（剰余価値学説史、第一章第十四節）。「この表は、資本の全生産遇程を再生産過程として叙述し、流通をただこの再生産過程の形態として、貨幣流通を資本の流通の一動機として、叙述するの試みであった。同時にまた、この再生産過程の中に、収入の起原、資本と収入との交換、再生産的消費と決定的消費との関係、というものを包含しょうとするの試みであった。また、資本の流通の中に、消費者と生産著（事実上、資本と収入）との間の流通を、包含しようとするの試みであった。最後に、この再生産過程の動機として生産的労働の二大区分－原生産と工業の間の流通を叙述するの試みであった。そしてこれらすべてを、一つの表の中に、すなわち実際上ただ、六つの出発点と帰着点とを結ぶ五つの線から成る表の中に、叙述するの試みであった。しかもそれは、十八世紀の最初の三分の一、すなわち経済学の幼少時代においてである。それはたしかに最も天才的な思いつきであった。経済学が今までにこれに負うところは少なくない。」

マルクス自身は、「資本論・第二巻・第二部・第三篇・第２０章；単純再生産、第２１章；蓄積と拡大再生産」の中で、再生産表式を展開している。生産財生産、消費財生産二部門における剰余価値の生産と部門内取引、二部門間取引を分析している。経済主体の相互関連をマクロにみている。

例；単純再生産の場合、添字（サフィックス）の１；生産財部門、２；消費財部門

Ｃ；不変資本、Ｖ；可変資本、Ｍ；剰余価値、Ｗ；生産された商品の価値

$$\begin{cases} C_1+V_1+M_1=W_1 \\ C_2+V_2+M_2=W_2 \\ V_1+M_1=C_2 \end{cases}$$

３．ソヴィエット革命後

ブハーリンの指導下、「ソ連邦国民経済バランス」1926年、

（商品経済消滅→経済学消滅→客観的経済法則の否定→計画経済下の均衡体系を追求）

数理形式主義的偏向があって、スターリンから「数字の遊技である」との批判され、経済バランスは中止。
産湯を捨てて赤子まで流してしまった。１９２９年
以後ソ連では、経済学の数理的側面を軽視してしまう。

４．ワシリー・レオンチーフ；　Wassily　Leontief（1906～
ソ連からドイツそして米国に移住しハーバード大教授となった経済学者；
「産業連関表」を創案（経済バランスを米国に移植）した。
「アメリカ経済の構造1919～29」1942年
依って立つ経済理論は真に科学的経済学でなく、現象論に留まっていた。

５．日本；官庁経済学
1957年通産省が「日本経済の産業連関分析」発表、それ以降５年ごとに作成、

## 産業連関表の問題点

１．剰余価値が隠されてしまっている。剰余価値の生産こそ資本主義的生産の基本動機である
２．「投入量＝産出量」；自動均衡論
３．依って立つ学理；「新古典派」等；経済主体；企業、家計とみる、価格は需給決定論
４．真に科学的な経済学で、表を編成し直すことも可能；ただし、初学者には難しい。

**参考文献**


高等学校工業科用「工業数理」実教出版1996年
ケネー、戸田正雄・増井健一訳「経済表」岩波文庫（951－951ａ）1966年
関恒義「現代の経済原論」実教出版，1997年
関恒義「経済学と数学利用」大月書店，1979年
大阪市立大学経済研究所編「経済学辞典第２版」岩波書店，1979年
マルクス、資本論翻訳委員会訳「資本論」新日本出版，1997年


## 転置行列について要点

$A=[a_{ij}]$　$B=[b_{ij}]$　両者ともにｎ次正方行列とするとき、
$A'=[a_{ji}]$　$B'=[b_{ji}]$　これらを転置行列とよぶ。
(ｉ)
$(AB)=[a_{ij}][b_{ij}]=[\Sigma a_{ik}b_{kj}]$　ならば、
$(AB)'=[\Sigma a_{jk}b_{ki}]=[\Sigma b_{ki}a_{jk}]=[b_{ji}][a_{ji}]=B'A'$
すなわち　$(AB)'=B'A'$　　・・・・・①

(ⅱ)

Ｅ；単位行列　Ｅ′＝Ｅ

$(AA^{-1})' = E' = E$

$(A^{-1})' A' = E$

上の式より

$(A')^{-1} = (A^{-1})'$　　　　　　・・・・・②

(ⅲ)

$(E - A') = [(\delta_{ij} - a_{ji})] = [(\delta_{ij} - a_{ij})]' = (E - A)'$　（$\delta_{ij}$；ｸﾛﾈｯｶｰのデルタ）

すなわち　$(E - A') = (E - A)'$　　・・・③

## 非負解存在の保障

問題；$(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{d}$　の係数行列$(E - A)$がはなはだ特殊な形をしている。

$(E - A) = [b_{ij}]$　$i \neq j$ のとき、$b_{ij} < 0$　$i = j$ のとき、$b_{ij} > 0$

はたして、$\mathbf{d}$ の要素が非負のとき、$\mathbf{x}$ の要素も非負であるか？

一般に

$$\langle A\rangle; \quad \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad (b_{ij} < 0, i \neq j)$$

のとき、

$$\langle B\rangle; \quad c_i \geq 0; (i = 1, \cdots, n) \quad \Rightarrow \quad x_i \geq 0; (i = 1, \cdots, n)$$

が保障されるか？

[定理]　Hawkins-Simon の条件（首座小行列式が正値をとる）

$$\langle C\rangle; \quad \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{h1} & \cdots & b_{hh} \end{vmatrix} > 0; (h = 1, \cdots, n) \quad \Rightarrow \quad \langle B\rangle$$

[証明]

$n=1$ のとき　＜$A$＞は、$b_{11} x_1 = c_1$

＜$C$＞より　$b_{11} > 0$　、$x_1 = c_1 / b_{11}$

$c_1 \geqq 0 \Rightarrow x_1 \geqq 0$　　即ち＜$B$＞が成立

$n = k - 1$ で成立すると仮定　　・・・＜$D$＞

$$\langle Ak\rangle; \quad \begin{cases} b_{11}x_1 + & \cdots & + b_{1k}x_k & = c_1 \\ b_{21}x_1 + & \cdots & + b_{2k}x_x & = c_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{k1}x_1 + & \cdots & + b_{kk}x_x & = c_k \end{cases}$$

掃き出し法の操作を行い

$$\langle A'k\rangle; \qquad \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ \cdots \ + b_{1k}x_k = c_1 & \cdots(1) \\ \qquad b_{22}^*x_2 + \ \cdots \ + b_{2k}^*x_k = c_2^* & \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \cdots(2) \\ \qquad b_{k2}^*x_2 + \ \cdots \ + b_{kk}^*x_2 = c_k^* & \end{cases}$$

（２）について＜$D$＞より

$$\begin{vmatrix} b_{22}^* & \cdots & b_{2h}^* \\ \vdots & & \vdots \\ b_{h2}^* & \cdots & b_{hh}^* \end{vmatrix} > 0; (h = 2, \cdots, k) \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad (c_2^* \geq 0, \cdots, c_k^* \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \geq 0, \cdots, x_k \geq 0) \quad \cdots(4)$$

行列式の性質により、＜$A\ k$＞の係数行列$B$と＜$A'\ k$＞の係数行列$B*$の行列式は等しく、

右辺を展開して、

$$|B| = |B^*|$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & b_{22}^* & \cdots & b_{2k}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{k2}^* & \cdots & b_{kk}^* \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22}^* & \cdots & b_{2k}^* \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k2}^* & \cdots & b_{kk}^* \end{vmatrix}$$

(3)より　｜$B$｜＞０、(1)より

$$b_{11}x_{11} - c_1 = -\sum_{j=2}^{k} b_{1j}$$

＜$A\ k$＞より、$b_{1j} \leqq 0$，(4)より $x_j \geqq 0$（$j = 2$，・・・、$k$）

$$\sum_{j=2}^{k} b_{1j}x_j \leq 0 \qquad b_{11}x_1 - c_1 \geq 0 \qquad b_{11}x_1 \geq c_1 \qquad x_1 \geq \frac{c_1}{b_{11}}$$

$$(c_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \geq 0)$$

まとめて　$n = k$　のとき

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{h1} & \cdots & b_{hh} \end{vmatrix} > 0; (k = 1, \cdots, k) \quad \Rightarrow \quad (c_1 \geq 0, \cdots, c_k \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq 0, \cdots, x_k \geq 0)$$

ゆえに、すべての$n$（$n$；自然数）について成立

**参考文献**

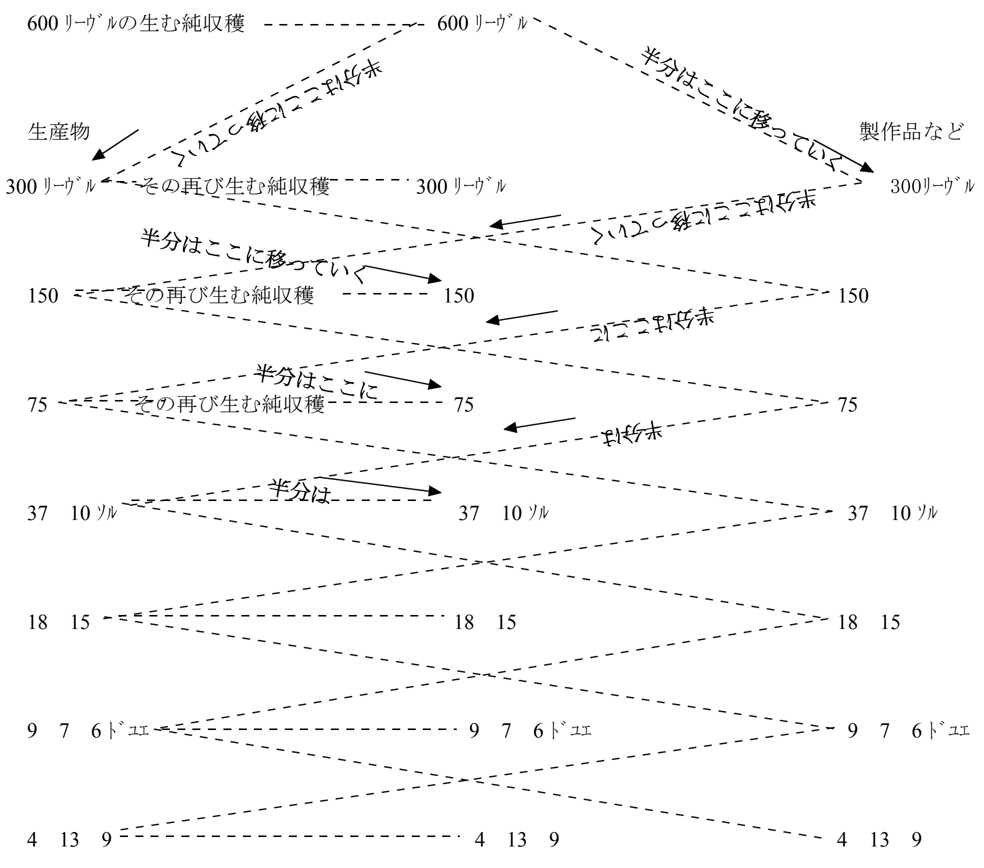
二階堂副包「経済のための線型数学」新数学シリーズ 22，培風館, 1961年

# 経 済 表（第二版）

考慮すべき対象（１）支出の三種類（２）支出の源泉（３）支出の投資（４）支出の分配（５）支出の結果(６）支出の再生産（７）支出相互の関係（８）支出と人口との関係（９）農業との関係（10）工業との関係(11）商業との関係（12）一国の富の総量との関係

| 生産的支出 | 所得の支出 | 不生産的支出 |
|---|---|---|
| 農業などに関するもの | 租税は徴収済みであり生涯的支出と不生産的支出とに分たれる | 工業などに関するもの |

| 所得600ﾘｰｳﾞﾙを生産するための年投投資600ﾘｰｳﾞﾙである | 年所得 | 製作品のための不生産的支出の年投資は300ﾘｰｳﾞﾙである |
|---|---|---|




以下省略

再生産総額　　所得の600ﾘｰｳﾞﾙ、これに加えて，年々の諸費用600ﾘｰｳﾞﾙと，農業者の原投資に対する利子300ﾘｰｳﾞﾙとがあるが土地がこれらを回復する。このようにして再生産は、この計算の基礎である600ﾘｰﾌﾞﾙの所得を含めて１５００ﾘｰﾌﾞﾙのものであるが．ここでは，徴収される租税と，所得の年々の再生産に必要な投資については考慮していない。次頁の「説明」を参照のこと

## *§１．連立方程式の解法*

### １．連立方程式の解法

　中学校で、連立方程式の解き方を習いました。そのとき、使った手法は、等置法、代入法、加減法でした。これからは、今まで学んだ行列の知識を使って別の方法で解いてみよう。

　（1）　２元１次連立方程式、

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c_1 \\ cx_1 + dx_2 = c_2 \end{cases}$$

未知数のヴェクトルを $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 　その係数行列を $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 　定数ヴェクトルを $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ 　とし、原方程式を行列表示にすると、

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

係数行列の第１列第１行要素を１にする行列；$P_1 = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を両辺にかけます。

$$\begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

係数行列第２行第１列要素を０にする行列；$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}$ を両辺にかけます。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & (bc-ad)/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ c/a & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

係数行列第２行第２列要素を１にする行列；$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a/(bc-ad) \end{bmatrix}$ を両辺にかけます。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a/(bc-ad) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & (bc-ad)/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a/(bc-ad) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ c/a & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ c/(bc-ad) & -a/(bc-ad) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

係数行列第１行第２列要素を０にする行列；$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & -b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を両辺にかけます。

$$\begin{bmatrix} 1 & -b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ c/(bc-ad) & -a/(bc-ad) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d/(bc-ad) & c/(bc-ad) \\ b/(bc-ad) & -a/(bc-ad) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

単位行列が表れて、解ヴェクトルはベールを脱いだ。なお右辺を整理してみると

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

ただし、$\Delta = ad - bc$　この$\Delta$は、既に二次行列の逆行列算出で出てきました。

初めの連立方程式について、係数行列を$A$、解ヴェクトルを$x$、定数ヴェクトルを$c$　と表すと

$$A\vec{x} = \vec{c} \qquad (\mathrm{i})$$

これに係数行列を変形する行列$P_1$・・・$P_4$を次々とかけていったので、

$$P_4 P_3 P_2 P_1 A\vec{x} = P_4 P_3 P_2 P_1 \vec{c}$$

左辺の５個の行列が単位行列Ｅになりました。

$$P_4P_3P_2P_1A = E \qquad \text{ゆえに} \qquad E\vec{x} = P_4P_3P_2P_1\vec{c} \qquad (\mathrm{ii})$$

ところで、係数行列Aの逆行列を$A^{-1}$と表わし、これを（ｉ）の両辺にかけると

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{c} \qquad A^{-1}A = E \quad \text{即ち} \quad E\vec{x} = A^{-1}\vec{c}$$

したがって、(ⅱ)式との比較から、$P_4P_3P_2P_1 = A^{-1}$になります。

　まとめ；以上の操作により、$A\vec{x} = \vec{c}$ から$\vec{x} = A^{-1}\vec{c}$ を導き、未知ヴェクトルを求めることができます。これを**「ガウス・ジョルダン消去法」の原理**といいます。

（２）　３元１次連立方程式

３元１次連立方程式についても同様な手法で、解と係数行列の逆行列を求めることができます。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

行列で表現すると

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = A, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{x} \quad 、 \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \vec{c}$$

とおくと、

$$A\vec{x} = \vec{c}$$

行列の変形行列を、$P_1P_2$・・・ $P_n$として、

$P_n$・・・$P_3P_2P_1A = E$、$P_n$・・・$P_3P_2P_1 = A^{-1}$　　となるようにすると、

$$P_n \cdots P_3 P_2 P_1 A\vec{x} = P_n \cdots P_3 P_2 P_1 \vec{c} \qquad E\vec{x} = A^{-1}\vec{c} \quad , \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{c}$$

## ２．連立方程式のＧ・Ｊ掃き出し法による解法

（1）　二元連立方程式

例(1)

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 = 18 \end{cases}$$ 行列で表現すると $$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 18 \end{bmatrix}$$

係数行列を単位行列にする操作は以下の手順でやります。この方法を「ガウス・ジョルダンの**掃き出し法＝Ｇ・Ｊ掃き出し法**」といいます。

| 1列；手順 | 2列；単位行列へ | 3列；定数項 | 4列　；逆行列作成へ | 5列 | 操作の意味 |
|---|---|---|---|---|---|
| ①<br>② | 5　－1<br>3　4 | 7<br>18 | 1　0<br>0　1 | ①<br>② | |
| ①×1／5<br>② | 1　－1／5<br>3　4 | 7／5<br>18 | 1／5　0<br>0　1 | ③<br>② | 変形行列$P_1$をかける |
| ③<br>②－③×3 | 1　－1／5<br>0　23／5 | 7／5<br>69／5 | 1／5　0<br>－3／5　1 | ③<br>④ | 変形行列$P_2$をかける |
| ③<br>④×5／23 | 1　－1／5<br>0　1 | 7／5<br>3 | 1／5　0<br>－3／23　5／23 | ③<br>⑤ | 変形行列$P_3$をかける |
| ③－⑤×(－1／5)<br>⑤ | 1　0<br>0　1 | 2<br>3 | 4／23　1／23<br>－3／23　5／23 | ⑥<br>⑤ | 変形行列$P_4$をかける |

一列目は計算手順を示し、２列目は係数行列に変形行列を掛けてできる行列を表しています。

３列目は、定数ヴェクトルに変形行列が作用した結果を示しています。そして、４列目は

単位行列に変形行列が掛けられて最後に定数行列の逆行列ができる様子を表しています。

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}、\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad 、A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/23 & 1/23 \\ -3/23 & 5/23 \end{bmatrix} = \frac{1}{23} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

掃き出し法によって、連立方程式の解ばかりでなく、係数行列の逆行列も求めることができきます。

練習(1)　次の連立方程式を**掃き出し法**で解いてみよう。

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -7 \\ 4x_1 - 6x_2 = 16 \end{cases}$$

練習(2)　連立方程式を作り、それを掃き出し法で解いてみよう。

（2）　三元連立方程式

例（2）

$$
\begin{cases}
2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 14 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13
\end{cases}
$$

行列で表現すると

$$
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 9 \\ 14 \\ 13 \end{bmatrix}
$$

「G・J掃き出し法」は以下のようにやります。

| 第1列；手順 | 第2列；単位行列へ | 第3列 | 第4列；逆行列作成へ | | 操作の意味 |
|---|---|---|---|---|---|
| ① | 2　1　2 | 9 | 1　0　0 | ① | 原方程式 |
| ② | 1　3　2 | 14 | 0　1　0 | ② | |
| ③ | 1　2　3 | 13 | 0　0　1 | ③ | |
| ①× 1/2 | 1　1/2　1 | 9/2 | 1/2　0　0 | ④ | 変形行列$P_1$を掛ける |
| ② | 1　3　2 | 14 | 0　1　0 | ② | |
| ③ | 1　2　3 | 13 | 0　0　1 | ③ | |
| ④ | 1　1/2　1 | 9/2 | 1/2　0　0 | ④ | 変形行列$P_2$を掛ける |
| ②—④×1 | 0　5/2　1 | 19/2 | －1/2　1　0 | ⑤ | |
| ③—④×1 | 0　3/2　2 | 17/2 | －1/2　0　1 | ⑥ | |
| ④ | 1　1/2　1 | 9/2 | 1/2　0　0 | ④ | 変形行列$P_3$を掛ける |
| ⑤×2/5 | 0　1　2/5 | 19/5 | －1/5　2/5　0 | ⑦ | |
| ⑥ | 0　3/2　2 | 17/2 | －1/2　0　1 | ⑥ | |
| ④—⑦×1/2 | 1　0　4/5 | 13/5 | 3/5　－1/5　0 | ⑧ | 変形行列$P_4$を掛ける |
| ⑦ | 0　1　2/5 | 19/5 | －1/5　2/5　0 | ⑦ | |
| ⑥—⑦×3/2 | 0　0　7/5 | 14/5 | －1/5　－3/5　1 | ⑨ | |
| ⑧ | 1　0　4/5 | 13/5 | 3/5　－1/5　0 | ⑧ | 変形行列$P_5$を掛ける |
| ⑦ | 0　1　2/5 | 19/5 | －1/5　2/5　0 | ⑦ | |
| ⑨×5/7 | 0　0　1 | 2 | －1/7　－3/7　5/7 | | |
| | | | | ⑩ | |
| ⑧—⑩×4/5 | 1　0　0 | 1 | 5/7　1/7　－4/7 | ⑪ | 変形行列$P_6$ を掛ける |
| ⑦—⑩×2/5 | 0　1　0 | 3 | －1/7　4/7　－2/7 | ⑫ | |
| ⑩ | 0　0　1 | 2 | －1/7　－3/7　5/7 | ⑩ | |

1列目は計算手順を示し、2列目は変形行列を掛けたできた行列を表し、3列目は、定数ヴェクトルに変形行列を掛けた

結果としてのヴェクトルを、４列目は単位行列に変形行列を掛けた結果を示しており、これが最終、係数行列の逆行列になります。

解ヴェクトル $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

定数行列Aの逆行列$A^{-1}$は$\begin{bmatrix} 5/7 & 1/7 & -4/7 \\ -1/7 & 4/7 & -2/7 \\ -1/7 & -3/7 & 5/7 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

練習(３)　次の連立方程式をガウス・ジョルダンの**掃き出し法**で解いてみよう。

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

練習（４）　３元１次連立方程式を作成し、それをガウス・ジョルダン掃き出し法で解いてみよう。

## *§２　産業連関表*

### １．産業連関表

次の表を見てじっくり見てください。

| | | 中　間　需　要 | | | 最　終　需　要 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 第一次 | 第二次 | 第三次 | 消費 | 投資 | 輸出 | 輸入 | 誤差 | 産出計 |
| 中間投 | 第一次 | 2.0 | 13.7 | 1.2 | 4.1 | 0.5 | 0.1 | －3.8 | －0.1 | **17.7** |
| | 第二次 | 3.7 | 173.1 | 42.9 | 60.2 | 81.2 | 38.7 | −28.6 | ＋0.1 | **371.3** |
| | 第三次 | 2.1 | 53.5 | 56.3 | 168.0 | 6.3 | 9.0 | −5.9 | 0 | **289.3** |
| 付加価値 | | 9.9 | 131.1 | 188.8 | | | | | | |
| **投入計** | | **17.7** | **371.3** | **289.3** | | | | | | |

（産業連関表Ｉ）

これは、１９８５年の日本の産業連関表・３部門連関表、単位は１兆円です。

第一行目の数字は、第一次産業（農林水産業）から自己産業及び他産業に投入（販売）した財貨と、消費・投資・輸出（ー輸入）された最終需要の価額が示されています。合計が生産額です。

第二行、第三行も同じ構造です。

第一列の数字は、第一次産業が自己産業、他産業から投入された（購入した）財貨・使役と付加された価値（労働）が示され、合計は財貨・労働の投入額を示しています。

第二列、第三列も同じ構造です。

各行と列の合計は等しくなっています。

＊ 財貨・サーヴィスの流れをうまく把握できますが、資本主義経済の基本動機である資本の増殖、剰余価値の生産は、示されません。また、生産財生産、消費財生産の区分による、再生産の構図はこれとは別に作成しなければなりません。

## ２．産業連関表の構造

原理を明確にするために、以下単純なモデルで考えます。

| | | 中　間　需　要 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 第一次 | 第二次 | 第三次 | 最終需要 | **産出計** |
| 間 | 第一次 | $x_{11}=1$ | $x_{12}=2$ | $x_{13}=0$ | $d_1=2$ | $X_1=5$ |
| 投 | 第二次 | $x_{21}=1$ | $x_{22}=10$ | $x_{23}=3$ | $d_2=6$ | $X_2=20$ |
| 入 | 第三次 | $x_{31}=0$ | $x_{32}=4$ | $x_{33}=2$ | $d_3=4$ | $X_3=10$ |
| 付加価値 | | $v_1=3$ | $v_2=4$ | $v_3=5$ | | |
| **投入計** | | $X_1=5$ | $X_2=20$ | $X_3=10$ | | |

（産業連関表Ⅱ）

表の性質から次の等式が成り立ちます。

$$\begin{cases} \text{第一行；} x_{11}+x_{12}+x_{13}+d_1=X_1 \text{、} \\ \text{第二行；} x_{21}+x_{22}+x_{23}+d_2=X_2 \text{、} \\ \text{第三行；} x_{31}+x_{32}+x_{33}+d_3=X_3 \text{、} \end{cases} \quad \cdots ①$$

$$\begin{cases} \text{第一列；} x_{11}+x_{21}+x_{31}+v_1=X_1 \\ \text{第二列；} x_{12}+x_{22}+x_{32}+v_2=X_2 \\ \text{第三列；} x_{13}+x_{23}+x_{33}+v_3=X_3 \end{cases} \quad \cdots ②$$

練習(1)　次の産業連関表の空欄を埋めてみよう。

| | 第一次産業 | 第二次産業 | 第三次産業 | 最終需要 | 産出量 |
|---|---|---|---|---|---|
| 第１次産業 | 1 | 0 | 0 | 7 | |
| 第二次産業 | 2 | ２０ | 3 | | |
| 第三次産業 | 1 | 4 | | | ３０ |
| 付加価値 | 4 | | ２１ | | |
| 投入量 | | ４０ | | | |

（産業連関表Ⅲ）

## ３．投入係数表

ところで、列を調べて $x_{11}/X_1$ は第一次産業産出物一単位当たり、第一次産業それ自体からの投入分の比率で、これを $a_{11}$ と表します。

$x_{21}/X_1$ は第一次産業一単位当たり、第二次産業からの投入分の比率で、$a_{21}$ と表し、同様に

$x_{31}/X_1$ は第一次産業一単位当たり、第三次産業からの投入分の比率で、$a_{31}$ と表します。

以下同様に、第二列、第三列の要素を合計で割って、投入分の比率を表します。

これらの比率を投入係数と言います。下は投入係数表です。

| | | 中　間　需　要 | | | 最終需要 | 産出計 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 第一次 | 第二次 | 第三次 | | |
| 中間投入 | 第一次 | $a_{11}=1/5$ | $a_{12}=1/10$ | $a_{13}=0$ | $d_1=2$ | $X_1=5$ |
| | 第二次 | $a_{21}=1/5$ | $a_{22}=1/2$ | $a_{23}=3/10$ | $d_2=7$ | $X_2=20$ |
| | 第三次 | $a_{31}=0$ | $a_{32}=1/5$ | $a_{33}=1/5$ | $d_3=4$ | $X_3=10$ |
| 付加価値 | | $v_1=3$ | $v_2=4$ | $v_3=6$ | | |
| **投入計** | | $X_1=5$ | $X_2=20$ | $X_3=10$ | | |

（投入係数表Ⅱ）

投入係数はその国の産業構造を示す量でしばらくは変化しないと見なすことができます。

練習(２)　産業連関表Ⅲから投入係数表を作ってみよう。

| | 第一次産業 | 第二次産業 | 第三次産業 |
|---|---|---|---|
| 第１次産業 | | | |
| 第二次産業 | | | |
| 第三次産業 | | | |

（投入係数表Ⅲ）

この係数を用いて上記産業連関表Ⅱの式①を書きなおすと、次のようになります。

$$\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+d_1=X_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3+d_2=X_2 \\ a_{31}X_1+a_{32}X_2+a_{33}X_3+d_3=X_3 \end{cases}$$

これを行列で表現してみよう。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

投入係数行列を $A$ 、産出額ヴェクトルを $\vec{X}$ 、最終需要ヴェクトルを $\vec{d}$ とすると、

$$A\vec{X}+\vec{d}=\vec{X}$$

$$A\vec{X}-\vec{X}=-\vec{d}$$

単位行列をＥとして

$$A\vec{X}-E\vec{X}=-\vec{d}$$

$$(A-E)\vec{X}=-\vec{d}$$

$(E-A)\vec{X}=\vec{d}$

これを産業連関表の**基本方程式**と呼びます。行列に展開すると下のようになります。

$$\begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$\vec{d}=(E-A)\vec{X}$ とすると、$d$は$X$に比例し、その比例係数が$(E-A)$とみなすことができます。

例題(１) 産業連関表Ⅱから（Ｅ－Ａ）表を作ってみます。

| （Ｅ－Ａ） | 第一次産業 | 第二次産業 | 第三次産業 |
|---|---|---|---|
| 第１次産業 | １－１/５＝４/５ | －１/10 | ０ |
| 第二次産業 | －１/５ | １－１/２＝１/２ | －３/10 |
| 第三次産業 | ０ | －１/５ | １－１/５＝４/５ |

例題(２) 上の表を使って、産業連関表の基本方程式を作ってみます。

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

例題(３) 上の基本式を使って、最終需要を産出量で表す式を作ってみよう。

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}X_1-\frac{1}{10}X_2 \\ -\frac{1}{5}X_1+\frac{1}{2}X_2-\frac{3}{10}X_3 \\ -\frac{1}{5}X_2+\frac{4}{5}X_3 \end{bmatrix}$$

例題(４) 産業連関表Ⅱの産出量を倍増してみると、最終需要はどうなるでしょうか。

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}\cdot 10-\frac{1}{10}\cdot 40 \\ -\frac{1}{5}\cdot 10+\frac{1}{2}\cdot 40-\frac{3}{10}\cdot 20 \\ -\frac{1}{5}\cdot 40+\frac{4}{5}\cdot 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-4 \\ -2+20-6 \\ -8+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

練習(３) 産業連関表Ⅲから（Ｅ－Ａ）表を作ってみよう。

| （Ｅ－Ａ） | 第一次産業 | 第二次産業 | 第三次産業 |
|---|---|---|---|
| 第１次産業 | | | |
| 第二次産業 | | | |
| 第三次産業 | | | |

練習(４) 上の表を使って、産業連関表の基本方程式を作ってみよう。

練習(５)　上の基本式を使って、最終需要を産出量で表す式を作ってみよう。

練習(６)　産出量を倍増すると、最終需要はどうなるでしょうか?

## ４．基本方程式より産出量を表す式を作る。

ところで、最終需要から、各産業の生産量を求めることができます。

$$(E-A)\vec{X}=\vec{d}$$

$$(E-A)^{-1}(E-A)\vec{X}=(E-A)^{-1}\vec{d}$$

$$E\vec{X}=(E-A)^{-1}\vec{d}$$

$$\vec{X}=(E-A)^{-1}\vec{d}$$

例題(５)　産業連関表Ⅱについて、基本方程式の逆式を求めてみます。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ① | 4/5 | －1/10 | 0 | $d_1$ | 1 | 0 | 0 | ① |
| ② | －1/5 | 1/2 | －3／10 | $d_2$ | 0 | 1 | 0 | ② |
| ③ | 0 | －1/5 | 4／5 | $d_3$ | 0 | 0 | 1 | ③ |
| ①×５／４ | 1 | －1/8 | 0 | 5/4・$d_1$ | 5/4 | 0 | 0 | ④ |
| ② | －1/5 | 1/2 | －3／10 | $d_2$ | 0 | 1 | 0 | ② |
| ③ | 0 | －1/5 | 4／5 | $d_3$ | 0 | 0 | 1 | ③ |
| ④ | 1 | －1/8 | 0 | 5/4　・$d_1$ | 5　/ 4 | 0 | 0 | ④ |
| ②+④×１／５ | 0 | 19/40 | －3／10 | 1／4・$d_1$+$d_2$ | 10/19 | 1 | 0 | ⑤ |
| ③ | 0 | －1/5 | －3／10 | $d_3$ | 0 | 0 | 1 | ③ |
| ④ | 1 | －1/8 | 0 | 5/4 ・$d_1$ | 5/4 | 0 | 0 | ④ |
| ⑤×40／19 | 0 | 1 | －12／19 | 10／19・$d_1$＋ 40／19.・$d_2$ | 10/19 | 40／19 | 0 | ⑥ |
| ③ | 0 | －1/5 | 4／5 | $d_3$ | 0 | 0 | 1 | ③ |
| ④＋⑥×1/8 | 1 | 0 | －3/38 | 2／19・$d_1$＋5/19・$d_2$ | 25/19 | 5/19 | 0 | ⑥ |
| ⑥ | 0 | 1 | －12/19 | 10/19・$d_1$＋40/19・$d_2$ | 10/19 | 40/19 | 0 | ⑧ |
| ③+⑥×１／５ | 0 | 0 | 64／95 | 2/19・$d_1$＋ 8／19・$d_2$＋ $d_3$ | 2/19 | 8/19 | 1 | |
| ⑦+⑥×1/8 | 1 | 0 | −3/19・4 | 25／19・$d_1$＋5/19・$d_2$ | 25/19 | 5/19 | 0 | ⑨ |
| ⑥ | 0 | 1 | −12/19 | 10／19・$d_1$+40／19・$d_2$ | 10/19 | 40/19 | 0 | ⑥ |
| ⑦× 19・5／64 | 0 | 0 | 1 | 5／32・$d_1$+5／8・$d_2$+19・5／64・$d_3$ | 5/32 | 45/64 | 95/64 | ⑩ |
| ⑨+⑩×３／19・4 | 1 | 0 | 0 | 3215/2432・$d_1$+15／19・$d_2$+15／256・$d_3$ | 3215/2432 | 15/19 | 15/256 | |
| ⑥+⑩× 12／19 | 0 | 1 | 0 | 5／8・$d_1$+5／2・$d_2$+15／16・$d_3$ | 5/8 | 5/2 | 15/16 | |
| ⑩ | 0 | 0 | 1 | 5／32・$d_1$+5／8・$d_2$+95／64・$d_3$ | 5/32 | 5/8 | 95/64 | |

上の表より次の結果が得られます。

$$(E-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{3215}{2432} & \dfrac{15}{19} & \dfrac{15}{256}\\ \dfrac{5}{8} & \dfrac{5}{2} & \dfrac{15}{16}\\ \dfrac{5}{32} & \dfrac{45}{64} & \dfrac{95}{64}\end{bmatrix} \qquad \vec{d}=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=(E-A)^{-1}\vec{d}$$

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{3215}{2432} & \dfrac{15}{19} & \dfrac{15}{256}\\ \dfrac{5}{8} & \dfrac{5}{2} & \dfrac{15}{16}\\ \dfrac{5}{32} & \dfrac{5}{8} & \dfrac{95}{64}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{3215}{2432}d_1+\dfrac{15}{19}d_2+\dfrac{15}{256}d_3\\ \dfrac{5}{8}d_1+\dfrac{5}{2}d_2+\dfrac{15}{16}d_3\\ \dfrac{5}{32}d_1+\dfrac{5}{8}d_2+\dfrac{95}{64}d_3\end{pmatrix}$$

この式によって、最終需要額から生産額を算出できます。

練習(7)　産業連関表Ⅲについて、掃き出し法により、基本方程式の逆式を求めてみよう。

## ５．付加価値を求める方程式を作る。

| | | 中　間　需　要 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 第一次 | 第二次 | 第三次 | 最終需要 | **産出計** |
| 中間投入 | 第一次 | $a_{11}$＝1/5 | $a_{12}$＝1/10 | $a_{13}$＝０ | $d_1$＝２ | $X_1$＝５ |
| | 第二次 | $a_{21}$＝1/5 | $a_{22}$＝1/2 | $a_{23}$＝3/10 | $d_2$＝７ | $X_2$＝２０ |
| | 第三次 | $a_{31}$＝０ | $a_{32}$＝1/5 | $a_{33}$＝1/5 | $d_3$＝４ | $X_3$＝１０ |
| 付加価値 | | $v_1$＝３ | $v_2$＝４ | $v_3$＝６ | | |
| **投入計** | | $X_1$＝５ | $X_2$＝２０ | $X_3$＝１０ | | |

（投入係数表Ⅱ）

この表の行をみて、基本方程式をつくりました。

例題(６)　今度は、列をみて式をつくってみます。②の式を書き換えます。

$$\begin{cases} a_{11}X_1+a_{21}X_1+a_{31}X_1+v_1=X_1\\ a_{12}X_2+a_{22}X_2+a_{32}X_2+v_2=X_2\\ a_{13}X_3+a_{23}X_3+a_{33}X_3+v_3=X_3 \end{cases}$$

例題(７)　上の式を行列とヴェクトルを使って表してみます。

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}$$

行列は、先に基本方程式に使ったものと異なっています。前者の行が後者の列に変わっています。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = A'$$

と表し、これをAの「転置行列」とよびました。

$$A'\vec{X} + \vec{v} = \vec{X}$$

$$A'\vec{X} - \vec{X} = -\vec{v}$$

$$\vec{X} - A'\vec{X} = \vec{v}$$

$$E\vec{X} - A'\vec{X} = \vec{v}$$

$$(E - A')\vec{X} = \vec{v}$$

転置行列の性質から

$$(E - A)'\,\vec{X} = \vec{v}$$

この方程式を「**双対基本方程式**」と呼びます。

例題(８) 産業連関表Ⅱの(E－A)から（E－A）′表を作ってみます。

| (E－A) | 第一次産業 | 第二次産業 | 第三次産業 |
|---|---|---|---|
| 第１次産業 | 4／5 | －1／10 | 0 |
| 第二次産業 | －1／5 | 1／2 | －3／10 |
| 第三次産業 | 0 | －1／5 | 4／5 |
| (E－A)′ | 第一次産業 | 第二次産業 | 第三次産業 |
| 第１次産業 | 4／5 | －1／5 | 0 |
| 第二次産業 | －1／10 | 1／2 | －1／5 |
| 第三次産業 | 0 | －3／10 | 4／5 |

例題(９) 上の表を使って、産業連関表の双対基本方程式を作ってみます。

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{3}{10} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

例題(10) 上の双対基本式を使って、付加価値を産出量（投入量）で表す式を作ってみよう。

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}X_1 - \frac{1}{5}X_2 \\ -\frac{1}{10}X_1 + \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{5}X_3 \\ -\frac{3}{10}X_2 + \frac{4}{5}X_3 \end{bmatrix}$$

例題(11) 産業連関表Ⅱの（投入量）産出量を倍増してみると、付加価値はどうなるでしょうか。

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}10 - \frac{1}{5}40 \\ -\frac{1}{10}10 + \frac{1}{2}40 - \frac{1}{5}20 \\ -\frac{3}{10}40 + \frac{4}{5}20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-8 \\ -1+20-4 \\ -12+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix}$$

練習(8)（ｉ）産業連関表Ⅲから（Ｅ－Ａ）′表を作ってみよう。

(ii) 上の表を使って、産業連関表Ⅲの双対基本方程式を作ってみよう。

(iii) 上の双対基本式を使って、付加価値を産出量（投入量）で表す式を作ってみよう

(iv) 産業連関表Ⅲの（投入量）産出量を倍増してみると、付加価値はどうなるでしょうか。

**６．双対基本方程式から、ｖが分かってＸを求める式を作る。**

$$(E-A')^{-1}(E-A')\vec{X} = (E-A')^{-1}\vec{v}$$

$$E\vec{X} = (E-A')^{-1}\vec{v}$$

$$\vec{X} = (E-A')^{-1}\vec{v}$$

転置行列の性質により

$$\vec{X} = \left((E-A)^{-1}\right)'\vec{v}$$

例題(12) 産業連関表Ⅱから、ｖが分かってＸを求める式を作ってみます。

| (E－A)$^{-1}$ | 第一次産業 | 第二次産業 | 第三次産業 |
|---|---|---|---|
| 第一次産業 | 3215／2432 | 15／19 | 15/256 |
| 第二次産業 | 5／8 | 5／2 | 15／16 |
| 第三次産業 | 5／32 | 5／8 | 95/64 |

| ((E－A)$^{-1}$)′ | 第一産業 | 第二次産業 | 第三次産業 |
|---|---|---|---|
| 第一次産業 | 3215／2432 | 5／8 | 5／32 |
| 第二次産業 | 15／19 | 5／2 | 5／8 |
| 第三次産業 | 15／256 | 15／16 | 95/64 |

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3215}{2432} & \frac{5}{8} & \frac{5}{32} \\ \frac{15}{19} & \frac{5}{2} & \frac{5}{8} \\ \frac{15}{256} & \frac{15}{16} & \frac{95}{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3215}{2432}v_1 + \frac{5}{8}v_2 + \frac{5}{32}v_3 \\ \frac{15}{19}v_1 + \frac{5}{2}v_2 + \frac{5}{8}v_3 \\ \frac{15}{256}v_1 + \frac{15}{16}v_2 + \frac{95}{64}v_3 \end{pmatrix}$$

例題 (13)　産業連関表Ⅱの付加価値を倍増するために、投入量はどうなるでしょうか。

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3215}{2432}&\frac{5}{8}&\frac{5}{32}\\\frac{15}{19}&\frac{5}{2}&\frac{5}{8}\\\frac{15}{256}&\frac{15}{16}&\frac{95}{64}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\8\\12\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3215}{2432}6+\frac{5}{8}8+\frac{5}{32}12\\\frac{15}{19}6+\frac{5}{2}8+\frac{5}{8}12\\\frac{15}{256}6+\frac{15}{16}8+\frac{95}{64}12\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\ \\\ \\\ \end{bmatrix}$$

練習(９)　産業連関表Ⅲからｖが分かってXを求める式を作ってみましょう。

練習(10)　産業連関表Ⅲの付加価値をばいぞうするために、投入量はどうなるでしょうか。

まとめ　基本方程式；$(E-A)\vec{X}=\vec{d}$ →逆式；$\vec{X}=(E-A)^{-1}\vec{d}$

双対方程式；$(E-A)'\vec{X}=\vec{v}$ →逆式；$\vec{X}=\left((E-A)^{-1}\right)'\vec{v}$

## *§３．あなたは経済大臣*

あなたは、あなた達が創設した国家の大蔵大臣、通産大臣、農水産大臣、経済企画庁長官を兼務する経済大臣です。

練習(１)　あなたの国の産業連関表を作ってみよう。但し産業は、二種類しかないものとします。

| | 第一産業 | 第二産業 | 最終需要 | 産出量 |
|---|---|---|---|---|
| 第一産業 | | | | |
| 第二産業 | | | | |
| 付加価値 | | | | |
| 産出量 | | | | |

（産業連関表Ⅳ）

練習(２)　産業連関表Ⅳから投入係数表を作成してみよう。

| | 第一産業 | 第二産業 |
|---|---|---|
| 第一産業 | | |
| 第二産業 | | |

練習(３)　上の投入係数表から（E－A）表を作成してみよう。

| (E－A) | 第一産業 | 第二産業 |
|---|---|---|
| 第一産業 | | |
| 第二産業 | | |

練習(４)　上の表を使って、最終需要を産出量で表す式＝基本方程式を作ってみよう。

$$\vec{d}=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\qquad\qquad&\qquad\qquad\\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}$$

練習(５)　産出量を倍増すると、最終需要はどうなるでしょうか?

練習(6)　投入係数表から、掃き出し法により、(E－A)$^{-1}$と、基本方程式の逆式を求めてみよう。

| (E－A)$^{-1}$ | 第一産業 | 第二産業 |
|---|---|---|
| 第一産業 | | |
| 第二産業 | | |

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

練習(7)　前問の式で、最終需要を倍増すると、産出量はどうなるでしょうか?

練習(8)　(E－A)′表を作ってみよう。

| (E－A)′ | 第一産業 | 第二産業 |
|---|---|---|
| 第一産業 | | |
| 第二産業 | | |

練習(9)　双対基本方程式を作って行列表示してみよう。

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

練習(10)　産出量を倍増すると、付加価値はどうなるでしょうか?

練習(11)　双対基本方程式から逆式を作って行列表示してみよう。

| ((E－A)$^{-1}$)′ | 第一産業 | 第二産業 |
|---|---|---|
| 第一産業 | | |
| 第二産業 | | |

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

練習(12)　付加価値を倍増すると、投入・産出量はいくらになるでしょうか?