トマ・ピケティ『*21* 世紀の資本』に見る数学教材

１．　人口論における増加率と人口そして増加指数関数

２．　β ＝資本／所得とｓ／ｇにおける漸化式と数列の収束

渡邊 勝

名寄市立大学短期大学部非常勤講師

2015 年 *7* 月 *28* 日、*29* 日

札幌市立清田緑小学校

0. はじめに

トマ・ピケティ『*21* 世紀の資本』、*2014* 年、みすず書房、（原題は　*Thomas Piketty LE CAPITAL AU XXI^e SIECLE*）は先進資本主義国で *160* 万部以上売られています。米国では、*2014* 年 *3* 月に出版され、直ちにアマゾン売上げ第一になりました。日本でも専門的書物にしては珍しく、*14* 部以上売られていて、*2015* 年 *1* 月に著者自身が来日し、講演なども行っています。

彼は、*1971* 年生まれ、*18* 歳で高等師範学校 *École Normale Supérieure* に入学、経済学を専攻して優れた論文による受賞もあります。*1993* 年から *2* 年間 *MIT* で助教授をした後、アメリカでの経済学研究の方向に違和感を覚えて、フランスに帰り、現在は彼が設立に力を貸したパリ経済学校の教授をしています。

雨宮処凜（かりん）が「筋トレにも使えそう」という *700* 頁超、値段も *6000* 円でお釣りが *60* 円という決して安くない書物に関心が集まったその理由は、現代資本主義の病理の一つである「格差拡大」を解明し同時にその解消策も示しているからだと思われます。

統計資料を使って、資本蓄積の歴史的展開を述べていることが、興味をそそられます。数式が殆ど出てきません。日本の多くの読者は数式が少しでもあると「引いてしまう」そうです。（数学書を読むのは「奇人、変人」類と見なされている？）また、横書きも敬遠されるために、よく売れるためには縦書きにしています。文章に「翻訳臭」がなく、大変熟（こ）れた文になっています。これは三人の訳者の経験と力量に依るのでしょう。

私が読み進んでいる中（うち）に、「これは数学の教材に使えそうだ」と思った今のところ *2* カ所を紹介します。また、「叩き台」としての授業プランも作って見ました。

1.　原著読み込み

1.1　人口論における増加率と人口増加

著作の一部を引用します。本文は縦書きですが、横書きに直しました。

第一部　所得と資本

第二章　経済成長ー幻想と現実

人口増加の段階（*P.P.82* ～ *83*）

では世界人口増加の検討に戻ろう。

1700 年から 2012 年にかけて観察された人口増のリズム（年平均で 0.8 ％増）がはるか昔に始まって、いままでずっと続いていたら、世界人口は 0 年から 1700 年までで 10 万倍近くに増えていたはずだ。1700 年の世界人口はおよそ 6 億人と推定されているので、この計算だとキリスト誕生時の世界人口は荒唐無稽なほど少なかった（1 万人以下）ということになってしまう。年率たった 0.2 ％の成長ですら、1700 年も続いていたとすれば、世界人口は紀元 0 年にたった 2000 万人だったことになってしまう。だがいま手持ちの最高の情報によれば、実際の人口は 2 億人以上だったはずで、そのうち 5000 万人がローマ帝国領内に住んでいた。歴史的な情報源やこの二つの時代に関する世界人口推計がどれほど欠点を持っていたとしても、0 年から 1700 年までの平均人口成長率が 0.2 ％以下だったのは絶対確実で、ほぼまちがいなく 0.1 ％以下だったはずだ。

一般に広く信じられているのとは裏腹に、このきわめて低い人口増加のマルサス的なレジームは、完全な人口停滞の世界ではなかった。人口増加率はたしかにかなり小さかったし、数世代の累積人口増は、疫病や飢餓が起こると数年で相殺されてしまった。それでも、世界人口は 0 年から 1000 年までに 4 分の 1 増え、1000 年から 1500 年の間に 5 割増え、1500 年から 1700 年にかけてさらに 5 割増えた。この 1500 － 1700 年では人口増加率は 0.2 ％近かった。人口増の加速はおそらくかなりゆっくりしたプロセスだったはずだし、医学知識や衛生改善と手に手を取って進んだろう。ということはつまり、きわめて緩慢だったということだ。

人口増加は 1700 年以後はかなり加速し、平均増加率は 18 世紀には年率 0.4 ％、19 世紀には 0.6 ％になった。ヨーロッパ（その落とし子たる米国）は、1700 年から 1913 年にかけて最も急激な人口増を体験したが、20 世紀に入るとそのプロセスは逆転した。1820 － 1913 年の 0.8 ％に比べると、1913 － 2012 年の時期にはヨーロッパの人口増加率は半減して 0.4 ％になった。ここで見られるのは人口転換と呼ばれる現象だ。平均余命が絶えず延びても出生率下落を相殺できず、人口増加率はだんだん低い水準に戻るのだ。

だが、アジアとアフリカでは、ヨーロッパよりはるかに長く出生率は高止まりしていたので、20 世紀の人口増はめざましすぎるほど高いものとなった。年率 1.5 － 2.0 ％の増加、つまり 1 世紀続くと人口は 5 倍以上になるということだ。エジプトは 20 世紀初頭には 1000 万人をわずかに越えるくらいの人口だったが、いまやそれが 8000 万人になっている。ナイジェリアとパキスタンはそれぞれ、2000 万人ほどしかいなかったのに、今日では両国とも 1.6 億人を擁する。

おもしろいことに、20 世紀のアジアとアフリカで実現された人口増加率 1.5 － 2 ％は、アメリカ大陸で 19 世紀と 20 世紀にみられたものとだいたい同じだ（次頁表 2–3 参照）。アメリカ大陸はこれにより、1780 年には人口 300 万人以下だったのが、1910 年には 1 億人になり、2010 年には 3 億人以上、つまりすでに述べたようにたった 2 世紀で 100 倍増加したことになる。決定的な違いは当然、新世界での人口増は主に他の大陸、特にヨーロッパからの移民のせいだったのに、アジアとアフリカの 1.5 － 2 ％増は、完全に自然増（生まれた人口から死者数をひいたもの）だけによるということだ。

この人口増の加速の結果として、世界人口増加は 20 世紀には空前の 1.4 ％に達した。18 世紀と 19 世紀の増加率は 0.4 － 0.6 ％に過ぎない（表 2–3 参照）。

念頭に置くべきこととして、人類はこの果てしない人口増の加速時期から抜け出ようとしている。1970 年から 1990 年にかけて世界人口はまだ年率 1.8 ％で増えていた。これは 1950 － 1970 年に実現された歴史的な 1.9 ％の成長率とほとんど変わらない。1990 － 2012 年の時期でも平均増加率はまだ 1.3 ％ときわめて高い水準だ。

公式の予測によると、世界水準でも人口転換に向かう勢いはいまや加速するはずで、やがては地

球人口は横ばいになるはずだ。国連予測にるると、*2030* 年代には世界人口の成長率は年 *0.4* %に下がり、*2070* 年代には *0.1* %に落ちつく。もしこの予測が正しければ、世界は *1700* 年以前のきわめて低い人口増期に戻ることになる。つまり世界人口増加率は *1700* ― *2100* 年の間に巨大な釣り鐘型の曲線を描いたことになり、*1950* ― *1990* 年に *2* %というすさ まじい頂点を迎えたことになる（図 *2–2* 参照）。

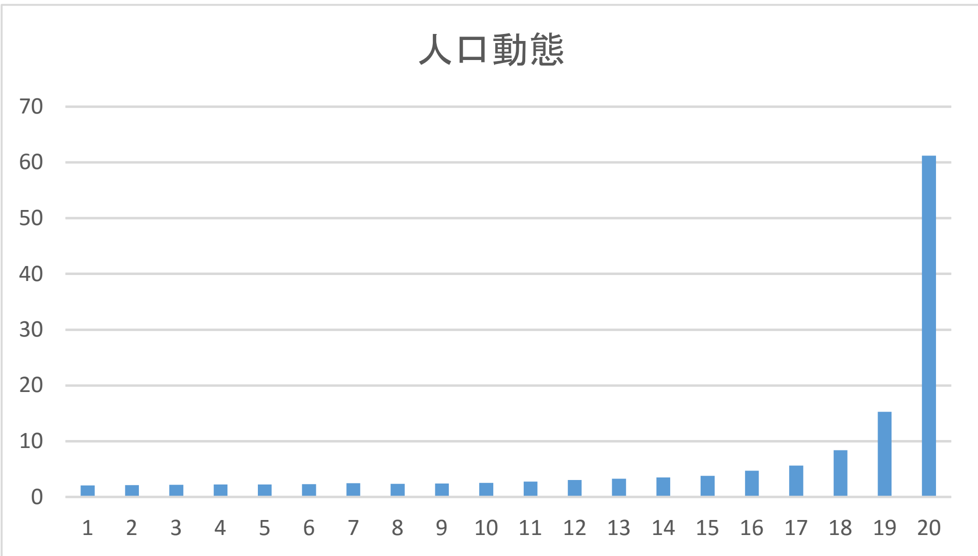
　さらに注目したいのは、*21* 世紀後半で予想されている人口増加率（*2050* ― *2100* 年で *0.2* %）はすべて アフリカ大陸のおかげだということだ（ここの人口増加率は年 *1* %）。他の三大陸では、人口は停滞するか（アメリカ大陸の *0.0* %）、減ることになる（ヨー ロッパはマイナス *0.1* %、アジアはマイナス *0.2* %）。これほど長期的なマイナス人口増が平和時に続くというのは空前の出来事だ（*2–3* 参照）。

ピケティ氏の世界人口に関する言説の要点は次の表の黒字部分になります。

青色文字部分は渡辺が補足しました。

時代区分	年数	増加率	世紀増加率	年間増加率	期末人口	初期値約 *2* 億人
0 年～ *1000* 年	*1000*	＋ *1/4*	$R_1 \fallingdotseq 0.023$	$\rho_1 \fallingdotseq 0.00022$	*2 5* 億人	$2 \times (1 + 0.25)$
～ *1500* 年	*500*	＋ *1/2*	$R_2 \fallingdotseq 0.084$	$\rho_2 \fallingdotseq 0.00081$	*3.75* 億人	$2.5 \times (1 + 0.5)$
～ *1700* 年	*200*	＋ *1/2*	$R_3 \fallingdotseq 0.22$	$\rho_3 \fallingdotseq 0.0020$	*5.62* 億人	$3.75 \times (1 + 0.5)$
～ *1800* 年	*100*		$R_4 = 0.49$	＋ *0.4* %	*8.38* 億人	$5.62 \times (1 + 0.004)^{100}$
～ *1900* 年	*100*		$R_5 = 0.82$	＋ *0.6* %	*15.24* 億人	$8.38 \times (1 + 0.006)^{100}$
～ *2000* 年	*100*		$R_6 = 3.02$	＋ *1.4* %	*61.20* 億人	$15.24 \times (1 + 0.014)^{100}$

渡辺が計算した結果をグラフにすると下図になります。



因みに、西暦 *2000* 年時の人口は、*Wikipedia* では以下のようになっています。

USCB (*2008*) 米国統計局	*PRB* (*2007*) 人口参照局	*UNDESA* (*2006*) 国連経済社会局	*HYDE* (*2006*) 地球環境歴史資料	*Maddison* (*2003*) 個人研究家	*Biraben* (*1980*) 個人研究家
6,084,907,596	*6,124,123,000*	*6,085,574,386*	*6,071,144,000*		*5,750,000,000*

青色で示した数値を得る計算は次頁に書いておきました。

$$(1 + R_1)^{10} = 1 + 0.25$$
$$10 \log_{10}(1 + R_1) = \log_{10} 1.25$$
$$\log_{10}(1 + R_1) \fallingdotseq 0.096910013 \,/\, 10$$
$$1 + R_1 = 10^{0.096910013 \,/\, 10}$$
$$1 + R_1 \fallingdotseq 1.023$$
$$R_1 \fallingdotseq 0.023$$

$$(1 + R_2)^{5} = 1 + 0.5$$
$$5 \log_{10}(1 + R_2) = \log_{10} 1.5$$
$$\log_{10}(1 + R_2) \fallingdotseq 0.176091259 \,/\, 5$$
$$1 + R_2 = 10^{0.176091259 \,/\, 5}$$
$$1 + R_2 \fallingdotseq 1.084$$
$$R_2 \fallingdotseq 0.084$$

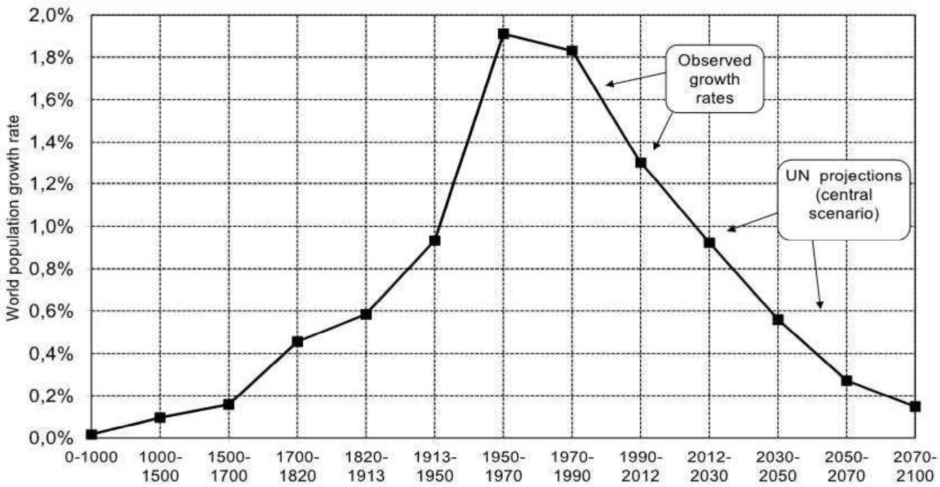
$$(1 + R_3)^{2} = 1 + 0.5$$
$$2 \log_{10}(1 + R_3) = \log_{10} 1.5$$
$$\log_{10}(1 + R_3) \fallingdotseq 0.176091259 \,/\, 2$$
$$1 + R_3 = 10^{0.176091259 \,/\, 200}$$
$$1 + R_3 \fallingdotseq 1.22$$
$$R_3 \fallingdotseq 0.22$$

$$(1 + \rho_1)^{1000} = 1 + 0.25$$
$$1000 \log_{10}(1 + \rho_1) = \log_{10} 1.25$$
$$\log_{10}(1 + \rho_1) \fallingdotseq 0.096910013 \,/\, 1000$$
$$1 + \rho_1 = 10^{0.096910013 \,/\, 1000}$$
$$1 + \rho_1 \fallingdotseq 1.00022$$
$$\rho_1 \fallingdotseq 0.00022$$

$$(1 + \rho_2)^{500} = 1 + 0.5$$
$$500 \log_{10}(1 + \rho_2) = \log_{10} 1.5$$
$$\log_{10}(1 + \rho_2) \fallingdotseq 0.176091259 \,/\, 500$$
$$1 + \rho_2 = 10^{0.176091259 \,/\, 500}$$
$$1 + \rho_2 \fallingdotseq 1.00081$$
$$\rho_2 \fallingdotseq 0.00081$$

$$(1 + \rho_3)^{200} = 1 + 0.5$$
$$200 \log_{10}(1 + \rho_3) = \log_{10} 1.5$$
$$\log_{10}(1 + \rho_3) \fallingdotseq 0.176091259 \,/\, 200$$
$$1 + \rho_3 = 10^{0.176091259 \,/\, 200}$$
$$1 + \rho_3 \fallingdotseq 1.0020$$
$$\rho_3 \fallingdotseq 0.0020$$

Figure 2.2. The growth rate of world population from Antiquity to 2100



The growth rate of world population was above 1% per year from 1950 to 2012 and should return toward 0% by the end of the 21st century. Sources and series: see piketty.pse.ens.fr/capital21c.

人口増加率のグラフはピケティ本著注釈サイトに掲載されています *http://cruel.org/books/capital21c/*

1.2.　β ＝資本／所得とs／gにおける漸化式と数列の収束

ピケティ本の該当部分を引用します。

第５章　長期的に見た資本／所得比率

資本主義の第二基本法則----$\beta = s / g$

長期的には、資本／所得比率βは、貯蓄率ｓ、成長率 g と以下の方程式で示される単純明快な関係を持つ。

$\beta = s / g$

たとえば　$s = 12\%$,　$g = 2\%$　なら $\beta = s/g = 600\%$ となる。

つまり、毎年国民所得の 12 %を蓄え、国民所得の成長率が年 2 %の国では、長期的には資本／所得比率は 600 %になる。この国は、国民所得 6 年分に相当する資本を蓄積することになる。

資本主義の第二基本法則ともいえるこの公式は、当然ではあるが重要なことを示している。たくさん蓄えて、ゆっ くり成長する国は、長期的には(所得に比べて)莫大な資本ストックを蓄積し、それが社会構造と富の分配に大きな 影響を与えるということだ。

ピケティ本著注釈サイト *http://cruel.org/books/capital21c/*に掲載されています $\beta = s/g$ の法則（*p.173–176*）部分を引用します。こちらの方が本文よりも数式を使って簡潔に述べられています。ただし、小さな間違いもありましたので、渡辺が訂正しておきました。

a.173–176 で説明した $\beta = s / g$ の法則は、富の蓄積をあらわす基本公式から派生したもの。価格効果なしのモデルで、蓄積のみが富をもたらす（天然資源なしの）場合、$t+1$ 年の富 W_{t+1} は、単純に年の富 W_t と、貯蓄 S_t の和となる：

$$W_{t+1} = W_t + S_t$$

各項を $t+1$ 年時点の国民所得 Y_{t+1} で割り、資本 ／所得比率を $\beta_t = W_t / Y_t$、国民所得の成長率を $1 + g_t = Y_{t+1} / Y_t$、貯蓄率を $s_t = S_t / Y_t$ とすると、つぎのように表せる。

$$\beta_{t+1} = \beta_t \times (1 + s_t / \beta_t) / (1 + g_t)$$

直観的には、富は成長率 s_t / β_t で成長するため、富 ／所得比率は、$s_t / \beta_t > g_t$ の場合に増加、$s_t / \beta_t < g_t$ の場合に減少する。つまり貯蓄率と成長率が両方とも一定水準 $s_t = s$、$g_t = g$ で安定すると、富 /所得比率 β_t は必ず $\beta = s / g$ となる。

上に引用した式展開では、判然としない点が多々ありますので、一応書き換えておきます。

$\beta = s / g$　の［証明］

$W_{t+1} = W_t + S_t$　の両辺を Y_{t+1} で割ります。

$$\frac{W_{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{W_t + S_t}{Y_{t+1}} \quad \cdots \quad ①$$

左辺は定義により、$\beta_{t+1} = \dfrac{W_{t+1}}{Y_{t+1}}$

t 年の経済成長率を g_t とすると、t 年期首国民所得 Y_t が期末には Y_{t+1} になるので、

$$Y_{t+1} = Y_t + g_t Y_t = (1 + g_t) Y_t$$

これを上式右辺に代入すると、

$$\frac{W_t + S_t}{Y_{t+1}} = \frac{W_t + S_t}{(1 + g_t) Y_t} = \frac{1}{(1 + g_t)} \left(\frac{W_t}{Y_t} + \frac{S_t}{Y_t} \right)$$

$\dfrac{W_t}{Y_t}$,　$\dfrac{S_t}{Y_t}$　はそれぞれ定義により、β_t、s_t　なお、s_t　は貯蓄率

よって、①式は次のようになります。

$$\beta_{t+1} = \frac{1}{(1+g_t)}(\beta_t + s_t)$$

右辺を整理して

$$\beta_{t+1} = \frac{1}{1+g_t}\beta_t + \frac{s_t}{1+g_t}$$

ここで、$\dfrac{1}{1+g_t} = A_t$，$\dfrac{s_t}{1+g_t} = B_t$　とおくと、$\beta_{t+1} = A_t\beta_t + B_t$　($t \geqq 0$)　となります。

さらに、g_t と s_t が変化しないと仮定して、それぞれを g、s として自動的に A_t と B_t　も変化しないので、A, B　のように書くと、$\beta_{t+1} = A\beta_t + B$　($t \geqq 0$)　となります。これは、β_t についての漸化式になっています。

この漸化式をよく知られた解法で解きます。

両辺について、階差を取ります。　$\beta_{k+1} - \beta_k = A(\beta_k - \beta_{k-1})$　　　($1 \leqq k \leqq t$)

階差数列は、初項が　$\beta_1 - \beta_0$　で公比が A の等比数列なので、

$$\beta_t = \beta_0 + \sum_{k=1}^{t-1} A^{k-1}(\beta_1 - \beta_0) = \beta_0 + \frac{1-A^{t-1}}{1-A}(\beta_1 - \beta_0)$$

成長率 g が正であるとき、$\dfrac{1}{1+g} = A$　は、$0 < A < 1$　なので、t を大きな値にすると、無限級数の和の公式を使い、このときの β_t を β として、　$\beta \sim \beta_0 + \dfrac{1}{1-A}(\beta_1 - \beta_0)$

この式を展開整理してみますと、$\dfrac{1}{1-A} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+g}} = \dfrac{1}{\dfrac{1+g-1}{1+g}} = \dfrac{1+g}{g}$　を使って、

$$\beta \sim \beta_0 + \frac{1}{1-A}(\beta_1 - \beta_0) = \beta_0 + \frac{1+g}{g}(\beta_1 - \beta_0) = \frac{1+g}{g}\beta_1 + \left(1 - \frac{1+g}{g}\right)\beta_0 = \frac{1+g}{g}\frac{W_1}{Y_1} - \frac{1}{g}\beta_0$$

$$= \frac{1+g}{g}\frac{W_0+S_0}{(1+g)Y_0} - \frac{1}{g}\beta_0 = \frac{1}{g}\times\frac{W_0+S_0}{Y_0} - \frac{1}{g}\beta_0 = \frac{1}{g}\times\left(\frac{W_0}{Y_0} + \frac{S_0}{Y_0}\right) - \frac{1}{g}\beta_0 = \frac{1}{g}\times(\beta_0 + s) - \frac{1}{g}\beta_0 = \frac{s}{g}$$

よって、$\beta \sim \dfrac{s}{g}$

■

ピケティ氏の言うところの「資本主義の第二基本法則」が証明されたのですが、いくつかの仮定が設けられてています。貯蓄率、成長率が変化しないとすることに無理があるようです。また、成長率 g が正であることもきつい制限です。これらの仮定の上に立っている「法則」であることに注意すべきでしょう。

なお、ピケティ氏の言う「資本主義の第一基本法則」とは、国民所得の中で資本からの所得の占める割合を α、投資した資本に対して受け取る収益の比率を r とします（r は「利潤率」に近い概念)。すると、$\alpha = r \times \beta$　となります。これが「第一基本法則」です。

［証明］　資本すなわち富 W からうけとる収益を G とすると、

$$\alpha = \frac{G}{Y},\ r = \frac{G}{W},\ \beta = \frac{W}{Y} \Rightarrow \alpha = r \times \beta$$

■

2　授業書

2.1　人口問題を数学的に取り扱ってみよう。

1. ある地域社会 *community*：*A* の人口が年当初 *1000* 人でした。年末になって、人口を確認しました。生まれた赤ちゃんは *10* 人,亡くなった方が *8* 人でした。このコミュニティ：*A* の出生率、死亡率、人口増加率を百分率、千分率で表してみよう。(*per cent*　：百につき、*per mill*：千につき)

［解］　出生率：$10 \div 1000 = 0.01$、死亡率：$8 \div 1000 = 0.008$、人口増加率：$0.01 - 0.008 = 0.002$

百分率を使うとそれぞれ、1 %、0.8 %、0.02 %

千分率を使うとそれぞれ、10 ‰、8 ‰、2 ‰　‰：

2. ある地域社会 *community*：*B* の人口が年当初 *1200* 人でした。年末になって、人口を確認しました。生まれた赤ちゃんは *7* 人, 亡くなった方が *12* 人でした。このコミュニティ：*B* の出生率、死亡率、人口増加率を百分率、千分率で表してみよう。少数第５位で丸めてください。(四捨五入してください)

［解］　出生率：$7 \div 1200 \fallingdotseq 0.0058$、死亡率：$12 \div 1200 \fallingdotseq 0.01$、

人口増加率：$0.0058 - 0.01 = -0.0042$

百分率を使うとそれぞれ、0.58 %、1 %、-0.42 %

千分率を使うとそれぞれ、5.8 ‰、10 ‰、-4.2 ‰

3. あるコミュニティ：*C* の第 *0* 年当初の人口が P_0 でした、このコミュニティ：*C* の年間人口増加率は r です。第 *0* 年末の人口則ち第 *1* 年当初の人口 P_1 はいくらでしょうか?

［解］　$P_1 = P_0 + rP_0 = (1 + r)P_0$

4. このコミュニティ：*C* の年間人口増加率が変わらないものとして、第 *2* 年当初、第 *3* 年当初の人口を求めてみよう。

［解］　それぞれの人口を P_2、P_3 と表すと、

$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1 + r)P_1 = (1 + r)(1 + r)P_0 = (1 + r)^2 P_0$$

$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1 + r)P_2 = (1 + r)(1 + r)^2 P_0 = (1 + r)^3 P_0$$

5. このコミュニティ：*C* の第 n 年当初の人口 P_n を求めてみよう。

［解］　帰納的推論により(厳密には数学的帰納法を使う)

$$P_1 = (1 + r)P_0 \text{ 、} P_2 = (1 + r)^2 P_0 \text{、} P_3 = (1 + r)^3 P_0 \text{、} \cdots \text{、} P_n = (1 + r)^n P_0$$

6. 上問で得た結果を用いて、問題 *1*、*2* の地域社会では *10* 年、および *20* 年経つと人口は何人になっていますか? 年間人口増加率が変わらないものとします。電卓を使います。

［解］　コミュニティ：*A* では 、年間人口増加率を r_A、当初人口を P_{A0} 、*10* 年後の人口を P_{A10}

20 年後の人口を P_{A20} として、

$$P_{A10} = (1 + r_A)^{10} P_{A0} = (1 + 0.002)^{10} \times 1000 = 1.002^{10} \times 1000 \fallingdotseq 1.020 \times 1000 = 1020$$

$$P_{A20} = (1 + r_A)^{20} P_{A0} = (1 + 0.002)^{20} \times 1000 = 1.002^{20} \times 1000 \fallingdotseq 1.040 \times 1000 = 1040$$

コミュニティ：*B* では 、年間人口増加率を r_B、当初人口を P_{B0} 、*10* 年後の人口を P_{B10}

20 年後の人口を P_{B20} として、

$P_{B10} = (1 + r_B)^{10} P_{B0} = (1 - 0.0042)^{10} \times 1200 = 0.9958^{10} \times 1200 \fallingdotseq 0.9588 \times 1200 \fallingdotseq 1150$

$P_{B20} = (1 + r_B)^{20} P_{B0} = (1 - 0.0042)^{20} \times 1200 = 0.9958^{20} \times 1200 \fallingdotseq 0.9193 \times 1200 \fallingdotseq 1103$

7. 上記コミュニティ A の人口がコミュニティ B の人口を追い越すのは何年後でしょうか？年間人口増加率が変わらないものとして求めてみよう。

［解］ n 年後のそれぞれの人口を P_{An}、P_{Bn} とします。$P_{An} > P_{Bn}$ となる n を求めます。

不等式は、$(1 + r_A)^n P_{An} > (1 + r_B)^n P_{Bn}$ 即ち $(1 + 0.002)^n \times 1000 > (1 - 0.0042)^n \times 1200$

$1.002^n \times 1000 > 0.9958^n \times 1200$ 、 $1.002^n \times 10 > 0.9958^n \times 12$ ここで両辺の常用対数をとります。 $\log_{10}(1.002^n \times 10) > \log_{10}(0.9958^n \times 12)$

$n\log_{10}1.002 + \log_{10}10 > n\log_{10}0.9958 + \log_{10}12$ 関数電卓を使って、

$n \times 0.00087 + 1 > n(-0.00018) + 1.07918$ 、 $0.00105n > 0.07918$、$n>75.4$

これより、76 年後に A の人口が B の人口を追い越すと結論できます。

8. トマ・ピケティ氏の『21 世紀の資本』によると、”紀元 0 年には世界人口が約 2 億人で、紀元 1000 年の間に 4 分の 1 増加した”とあります。この 10 世紀の間、1 世紀ごとの「世紀人口増加率」R_1 が一定だとして、その値はいくらになりますか？

［解］ この間の人口増加率は 0.25 ですので、$(1 + 0.25) \times 2 = 2.5$（億人）

$(1 + R_1)^{10} = 1 + 0.25$、$10 \log_{10}(1 + R_1) = \log_{10} 1.25$、$\log_{10}(1 + R_1) \fallingdotseq 0.096910013 / 10$

$1 + R_1 = 10^{0.096910013 / 10}$ 、$1 + R_1 \fallingdotseq 1.023$、$R_1 \fallingdotseq 0.023$

9. 上記ピケティ氏の記述を元に、計算すると 2000 年間で 2 億人から 61 億人に増加しました。その間、世紀増加率 R が一定値を取ったとして、R はいくらだろうか？

［解］ $2(1 + R)^{20} = 61$、$(1 + R)^{20} = 30.5$、$20 \log_{10}(1 + R) = \log_{10} 30.5$

$\log_{10}(1 + R) \fallingdotseq 1.484 / 20$、$1 + R = 10^{0.0742}$、 $1 + R = 1.186$、 $R = 0.186$

10. 当初人口 1 万人のコミュニティ：D が年間人口増加率 0.1 を持っていて、10 年経過したときの人口は、単位を万人として、$(1 + 0.1)^{10} \times 1 \fallingdotseq 2.5937$ と推定されます。ここで、思考実験をします。

年間人口増加率を「日間人口増加率」に置き換えます。単純に $0.1 \div 365$ とします。人口予測値は

$$\left(1 + \frac{0.1}{365}\right)^{10 \times 365} \times 1 \cong 2.7179$$ となります。

今度は、「時間人口増加率」に置き換えます。「日間人口増加率」を単純に 24 で割ります。

$$\left(1 + \frac{0.1}{365 \times 24}\right)^{10 \times 365 \times 24} \times 1 \cong 2.7183$$ となります。

さらに、「分人口増加率」に置き換えます。単純に「時間人口増加率」を 60 で割って求めます。人口はいくらになるでしょうか？続けて「秒間人口増加率」によるといくらになるでしょうか？

［解］ $$\left(1 + \frac{0.1}{365 \times 24 \times 60}\right)^{10 \times 365 \times 24 \times 60} \times 1 \cong 2.7183$$

$$\left(1 + \frac{0.1}{365 \times 24 \times 60 \times 60}\right)^{10 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60} \times 1 \cong 2.7183$$

12. 上問の結果を見ると、時間間隔を短くしていくとある一定の数値に収束する様子が見えます。
それを理論的に究明してみましょう。

あるコミュニティの当初人口を P_0、年間人口増加率を r として n 年経過後の人口を P_n とすると、$P_n = (1 + r)^n P_0$ でした。1 年を細分化します。k 分割します。上問の例では、k が 365、365 × 24、365 × 24 × 60、365 × 24 × 60 × 60 と次第に大きな数にしていきました。

上式は、$P_n = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{n \times k} \times P_0$ となります。ここで少しく技巧的な処理をします。$\frac{r}{k} = \frac{1}{j}$ としします。すると、$k = j\ \ r$ となります。これを用いて改めて式を書き直すと、

$P_n = \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{n \times jr} \times P_0$ となり、さらに書き直して、$P_n = \left\{\left(1 + \frac{1}{j}\right)^j\right\}^{r \times n} \times P_0$

k の値を大きくしていくと j の値も大きくなります。そこで電卓を使って、$\left(1 + \frac{1}{j}\right)^j$ 式の j を 10, 100、1000、10000、100000 と順次変えながら計算してみましょう。

［解］ $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2.593742460$、$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2.704813829$、$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2.716923932$

、$\left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2.718145927$、$\left(1 + \frac{1}{100000}\right)^{100000} = 2.718268237$

13. 上問の結果を見ると、$\left(1 + \frac{1}{j}\right)^j$ では $j \to \infty$ のとき、一定の値に収束するようです。この極限値を e と表します。円周率 π のような特別な数です。$e = 2.71828\cdots$「鮒一鉢二鉢」と覚えます。別の覚え方も研究してみてください。さて、12 番で研究した式は、次のようになります。

$P_n = \left\{\left(1 + \frac{1}{j}\right)^j\right\}^{r \times n} \times P_0 = e^{rn} \times P_0$ そこで、11 番の問題を改めて書き直して見ると、

$P_{10} = e^{0.1 \times 10} \times 1 = e = 2.71828$ となります。6 番の問題を上に倣って書き直して見ましょう。

［解］

$P_{A10} = e^{0.002 \times 10} \times 1000 = 1.020 \times 1000 = 1020$ 、$P_{A20} = e^{0.002 \times 20} \times 1000 = 1.040 \times 1000 = 1040$

$P_{B10} = e^{-0.00422 \times 10} \times 1200 \fallingdotseq 0.95867 \times 1200 \fallingdotseq 1150$

$P_{B20} = e^{-0.00422 \times 20} \times 1200 \fallingdotseq 0.91906 \times 1200 \fallingdotseq 1103$

14. e を別の角度から考究してみます。それは、対数関数 $y = f(x) = \log_a x$ を微分するすることから始めます。この関数を定義に従って微分してください。そのあと、第 15 問題で用いたと同じ技巧を用いて $\left(1 + \frac{1}{j}\right)^j$ が出てくるように整理してください。

［解］ $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to \infty} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to \infty} \frac{\log_a(x + h) - \log_a(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x + h}{x} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \to 0} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

ここで、 $\dfrac{h}{x}=\dfrac{1}{j}$ とおきます。すると、 $\dfrac{1}{h}=\dfrac{j}{x}$ このとき、$h \to 0$ ならば $j \to \infty$ なので

$$y' = \lim_{j \to \infty} \log_a\left(1+\frac{1}{j}\right)^{\frac{j}{x}} = \frac{1}{x}\lim_{j \to \infty} \log_a\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j}$$ となります。

お話. 問題 *13* で見たように、$j \to \infty$ のとき、$\left(1+\dfrac{1}{j}\right)^j \to e$ となることを使うと、前問の結果

により $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\log_a e$ となります。そこで、対数の底である a を e にすると、

$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\log_e e$ となります。ところで、対数の性質により「真数が底と同じならば対数は 1」

を使って、$\log_e e = 1$ ですから、 $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$ となります。すなわち $y = f(x) = \log_e x$ の

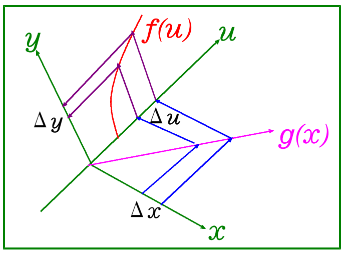
とき $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$ と言えます。

このように e を底にしておくと、簡潔な結果を得ることができるのです。そこで、$\log_e x$ のような e が底の場合 e を省略して $\log\ x$ と書いたり、$\ln x$ と書いたりします。

$y = \ln x$ ならば $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$ 。$\log_{10} A$ を「常用対数」、$\ln A$ を「自然対数」と言います。

このように e は「自然対数の底」になるのです。

次に、$u = e^{x}$ を微分します。これには、初めに両辺の対数をとります。$\ln u = \ln e^{x}$ …①
対数の性質により、右辺は $x \ln e = x$ となり、①は、$\ln u = x$ 。この両辺を x で微分します。
ここで「合成関数の微分」が使われます。
一般に、$y = f(u)$、$u = g(x)$ ならば、$y = f(g(x))$ となり、y は関数 f と g の合成関数になります。このときの微分は下の図を見て了解してください。



$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \times \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ Δx、Δu、Δy を無限小にすると、 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

さて、問題に戻って、①の左辺は、$y = f(u) = \ln u$、
$u = g(x) = e^{x}$ として $y = \ln\ u$ を x で微分します。上の合成関数微分公式を使って

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx} = \dfrac{d}{du}\ln u \times u' = \dfrac{1}{u} \times u'$ 即ち ①は、 $\dfrac{1}{u} \times u' = 1$ これより、$u' = u$

つまり、$(e^x)' = e^x$ なのです。

$y = e^{\lambda x}$ （λ は定数） を微分します。$\lambda x = u$ とおきます。$y = e^{u}$ 合成関数の微分公式で

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{du}(e^u) \times \dfrac{d}{dx}(\lambda x) = e^u \times \lambda = \lambda e^{\lambda x}$ 即ち $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$

この続きは、人口成長モデルを微分方程式で表して、それを解くことになり、より現実的なモデルを作る作業に移るのです。まあ、これは大学生が対象でしょうか？

2.2　β＝資本／所得 と s／g における漸化式と数列の収束

0. 資本主義社会を単純にモデル化をしてみよう。

一国の第 t 年１年間の経済活動は、
労働者の労働によって、資本が運動する。資本の運動によって、労働者は賃金を得る。また、資本所有者は利潤を得る。この賃金と利潤の合計を「国民所得」Y_t とする。所得の一部を貯蓄するその額を S_t とする。資本は「国富」として存在する。その額を W_t とする。翌年の国富 W_{t+1} は

$$W_{t+1} = W_t + S_t \quad \cdots \quad ①$$

と考える。

　次に、国富が国民所得に対してどれくらいあるかを問題にする。そこで　国富対国民所得比を β_t と名付けて、次のように定義する。$\beta_t = \dfrac{W_t}{Y_t}$

　貯蓄率を s_t　として、$s_t = \dfrac{S_t}{Y_t}$　と定義する。

以上のように準備します。

1. 国民所得の成長率を g_t とするとき、Y_{t+1} を Y_t と g_t $(t \geqq 0)$ とで表してみよう。

［解］　増分は g_tY_t　なので、$Y_{t+1} = Y_t + g_tY_t = (1 + g_t)Y_t$

2. ①式の両辺を Y_{t+1}　で割って、β、s、g　で表してみよう。

［解］

$$\frac{W_{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{W_t + S_t}{Y_{t+1}} = \frac{W_t + S_t}{(1+g_t)Y_t} = \frac{1}{1+g_t} \times \left(\frac{W_t}{Y_t} + \frac{S_t}{Y_t} \right) = \frac{1}{1+g_t} \times (\beta_t + s_t)$$

即ち　$\beta_{t+1} = \dfrac{1}{1+g_t} \times (\beta_t + s_t)$

3. 上の問題の結果は、β_{t+1} と β_t　の関係を示しているようです。漸化式で表現してみよう。
隣接二項漸化式には以下の型があります。それのどれに該当するかを見ながら書いてみましょう。

① $a_{n+1} = a_n + d$（等差数列）、② $a_{n+1} = r\,a_n$（等比数列）、
③ $a_{n+1} = p\,a_n + q$　、④ $a_{n+1} = p\,a_n + qn + r$　、⑤ $a_{n+1} = p\,a_n + q^n$
⑥ $a_{n+1} = \dfrac{ra_n}{pa_n + q}$　⑦ $a_{n+1} = \dfrac{ra_n + s}{pa_n + q}$

［解］　$\beta_{t+1} = \dfrac{1}{1+g_t} \times (\beta_t + s_t)$　即ち　$\beta_{t+1} = \dfrac{1}{1+g_t}\beta_t + \dfrac{s_t}{1+g_t}$　$(t \geqq 0)$

4. 上の漸化式を解いてみよう。ただし、このタイプの漸化式の解き方は色々あります。ここでは、参考例を参照して解いてください。なお、ここで、経済的な制限を加えます。s_t と g_t が一定であってそれぞれが s と g であるとします。

［参考例］ $a_{n+1} = p\,a_n + q \quad (n \geqq 1)$

$$-)\quad a_n = p\,a_{n-1} + q$$

$$a_{n+1} - a_n = p(a_n - a_{n-1})$$

ここで、$a_n - a_{n-1} = b_n$ とおきます。

上式は、$b_{n+1} = pb_n \quad (n \geqq 1)$ となります。

これは、初項が b_1 で公比が p の等比数列です。

一般項は $b_k = b_1 p^{k-1}$ です。

よって、原数列の一般項は

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{t-1} b_1 r^{k-1} \qquad (n \geqq 0)$$

即ち $a_n = a_0 + b_1 \dfrac{1 - r^{n-1}}{1 - r}$

［解］ $\beta_{t+1} = \dfrac{1}{1+g}\beta_t + \dfrac{s}{1+g}$

$$-)\quad \beta_t = \frac{1}{1+g}\beta_{t-1} + \frac{s}{1+g}$$

$$\beta_{t+1} - \beta_t = \frac{1}{1+g}(\beta_t - \beta_{t-1})$$

ここで、$\beta_t - \beta_{t-1}$ を B_t とおきます。

上式は $B_{t+1} = \dfrac{1}{1+g}B_t \quad (t \geqq 1)$

これは、初項が B_1 公比が $\dfrac{1}{1+g}$ の等比数列

一般項は、$B_k = B_1\left(\dfrac{1}{1+g}\right)^{k-1}$

よって、原数列の一般項は

$$\beta_t = \beta_0 + \sum_{k=1}^{t-1} B_1\left(\frac{1}{1+g}\right)^{k-1} \qquad (n \geqq 0)$$

即ち $\beta_t = \beta_0 + B_1 \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{1+g}\right)^{t-1}}{1 - \dfrac{1}{1+g}}$

5. ここで g が正であると仮定します。そして、t の値を非常に大きな値にしたとき、上の問題の結論はどのようになるでしょうか。

［解］ $g > 0$ なので $0 < \dfrac{1}{1+g} < 1$ つまり、等差数列の公比が正でかつ 1 を越えないので、この数列は有限実数値に収束します。従って t を無限大に持って行けば、上問で得た結論は次のようになります。ただし、$\beta_\infty = \beta$ と表わします。

$$\beta = \beta_0 + B_1 \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1+g}} = \beta_0 + B_1 \frac{1+g}{g}$$

6. 上式の β_0、B_1 を g、s を使って消去すると、$\beta = \dfrac{s}{g}$ となります。

いま、$g = 2$％、$s = 12$％ ならば、β はいくらになるでしょうか？その意味は何でしょうか？

［解］ $\beta = \dfrac{s}{g} = \dfrac{12}{2} = 6$

国富が年間国民所得の 6 倍あることを示しています。