

行列をどのように教えているか

特に、固有値に関連して

渡邊 勝

立命館慶祥中学校・高等学校非常勤講師

2003年11月8(土)～9(日)

北海道札幌厚別高校

1. 基礎資料

対象生徒；3年F組、「他大学理系進学コース」、40名（男子22，女子18名）

対象科目；数学C（二年生時3月から数学Bの後に履修し始めた。）

教授時間；2単位；4月18日から

教授項目；逆行列、固有値、対角化、連立方程式の解法、G/J掃き出し法

教科書；数研出版(株)「改訂版 高等学校 数学C」

2. 現行指導要領の問題点

(1) 数Iで、術語「判別式」を使わずに、“ $b^2 - 4ac$ ”と言い換えて導入したことと同じ傾向が見える。

実際には行列式を使わせるが、術語「行列式」ということばを使わない。即ち、二次行列の場合 “ $\Delta = ad - bc$ ”として、行列式を Δ で表しているが、「匿名」即ち、術語を隠して登場する。そのためか Δ さえも使わずに“ $ad - bc$ ”とだけで済ましてしまう個所もある。

指導要領作成者は、なるべく学術用語を使わないで用を足そうとしている。”学習者への負担になるから”という理由を仄聞したことがあが、実に滑稽な理屈だ。

概念に名前があるから、我々は互いに共通な認識を持ち、意見・意志の交換ができる。また、思考過程では、それらの概念を軽々と取り扱い、難しい概念操作も出来るはずだ。

「判別式」の場合、解の種類分け *discrimination* を問題意識として持つから、その時の用具として判別式 *discriminant* という概念が必要とされる。

「行列式」も、“逆行列が存在するかどうか”、“連立方程式の解、同次方程式の解が存在するかどうか”という問題意識から生まれる。行列を決定づける *determine* ものとしての行列式 *determinant* という概念が必要とされる。

「判別式」「行列式」ということばを教えないと言うことは、“判別する”あるいは“特性を調べる”という問題意識を持たせないことになる。つまり、ことばを教えないことは、科学としての数学の根幹にある問題意識を軽視ないし無視することだ。

ひょっとして、指導要領作成者達は数学を科学とみていないで、なにものかを訓練するための「道具」として試しているのではないかという疑いをもってしまう。

(2) 教科書では、固有値も「匿名」で登場しているが、これもしっかり示した方が、理解が深化するはずだ。

(3) 「行列の作用」が、現行指導要領では、写像を削除してしまい、作用が見えなくなってしまった。

ベクトルに行列が作用して、新たなベクトルが生まれるという基本さえも理解できなくなってしまう。

そのため、固有値を求める問題の必然性も分からなくなってしまう。

(4) 「掃き出し法」の理論的根拠を示さずに、“how to”だけを示す。このぐらいの「理論」なら別に難しいということもないと思う。

3. 何をどのように教えるべきか。

(1) “概念の必然性”に至るには、問題意識を喚起しなければならない。“行列の乗法”では、乗法・積の意味を考えなければならない。そのための、ヒントを与えた。

森毅『数の現象学』1978、朝日新聞社刊

“次元を異にする3種の乗法”の中で倍操作型、複比例型、正比例型として提示している。

このように、方法について参考になる考え方が、一般人（数学研究者、教師でない人）向けに示されている。

(2) 視覚に訴えることも、認識深化には必要だ。“I see”と言わせる仕掛けを工夫する必要がある。

ベクトル場を図示して、固有ベクトルを視覚化してみた。

(3) 数学は人間が作り上げた文化である。作るのは人間である。なるべく数学者の名前を出すようにしている。ただし、これは、自分の浅学のため、十分に出せない恨みがある。高校の教材に関わる数学史の人物を共同作業で、研究してみたらどうだろうか。

(4) 大学入学試験では、行列の対角化とその n 乗がよく出される。これも、きちんとした文脈で示さなければ、不十分な理解に留まるであろう。

ちなみに「ハミルトン・ケーリーの定理」だって、固有値、固有方程式に触れて、初めて、納得するはずだ。

*** 以下参考資料 *** 授業で使用したプリント

行列は作用である。

$1.001 \times 50 \text{ m} = 50.05 \text{ m}$; 「 50 m の鉄棒が熱で 50 m と 5 cm になった」
熱膨張

$3 \times 5 \text{ ha} = 15 \text{ ha}$; 「 5 ha の土地を3倍にしたら 15 ha になった。」
農業大規模経営化

$2 \times 15000 \text{ 円} = 30000 \text{ 円}$; 「一万五千円を二倍にしたら3万円になった」
所得倍増

以上の構造は、 $k \times x = y$; 「 x (対象)を k 倍(作用)したら y (結果)になった。」
われわれが今学習している行列についても同じことが言えるのではないだろうか。

行列 \times ベクトル=新ベクトル
(作用 \times 対象 = 結果)

作用の対象となるベクトルとして、平面上の点の位置ベクトルをとる。

これに行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ を作用させてみる。

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

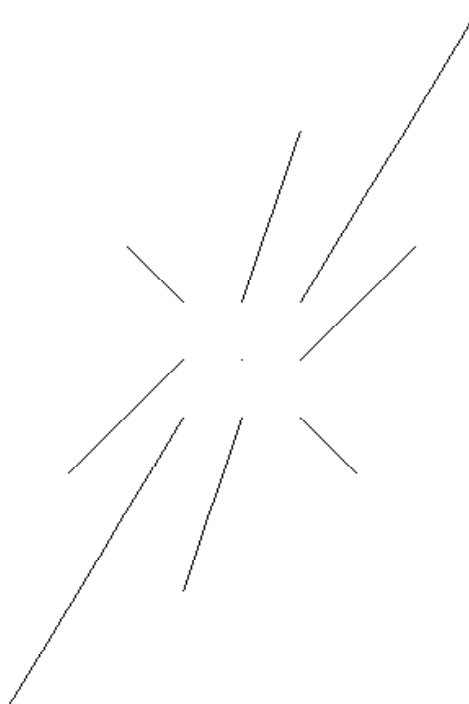
$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

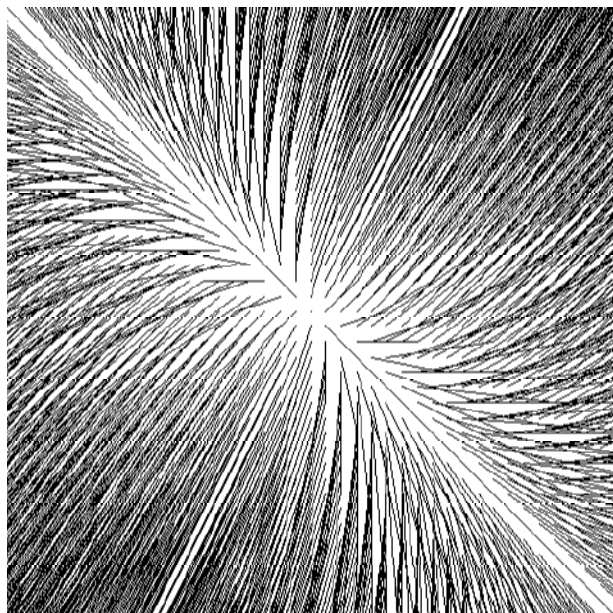


矢印は、作用を目にみえるようにしたものである。

上の場合は、原点も含めてわずか9点であった。

今度は、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に、 $x = -25, \dots, 25$ 、 $y = -25, \dots, 25$ を入れて合計 2601 点

について、 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$ の計算をしてみる。その結果、下図を得た。



この図を見て気が付くことは？ \Rightarrow 多分二本の直線があることに気が付いたと思う。
この直線上にある点=位置ベクトルにAを作用させてみよう。

逆 45° 線 ($y = -x$) 上の点=位置ベクトルで試してみよう。

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \dots$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \dots$$

ここでは、どうやら、 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ が成り立っているようだ。

次に、右上がり線 ($y = 2x$) 上の点=位置ベクトルで試してみよう。

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \dots$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \dots$$

ここでは、どうやら、 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ が成り立っているようだ。

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ を一般化して考えてみよう。

上の表現をまとめて書けば、 $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ となり、

行列Aは、作用としては、 k 倍することに等しくなってしまう。

つまり、特別なベクトル(群)に作用すると、行列の働きが単純化されてしまう現象が起こるのだ。

このとき、 k を行列Aの「固有値」と呼び、 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ を「固有ベクトル」と呼ぶ。

固有の ; eigen /アイグン/ 語源はドイツ語、「自分自身の」「持ち前の」「独自の」
「固有の」の意味をもつ eigen /アイグン/。

固有値 ; eigen value

固有ベクトル ; eigen vector

さて、この固有値を求める方法を考えてみよう。

具体例

固有値を k として $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ とおく。この式を以下のように変形してみる。

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3-k & 1 \\ 2 & 4-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{これは、定数項が零ベクトルである連立方程式である。}$$

これが、 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (自明解)以外の解を持つためには、係数行列の行列式が

0でなければならない。(教科書 pp.30 ~ 31 参照) すなわち、

$$\begin{vmatrix} 3 & -k & 1 \\ 2 & & 4-k \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-k)(4-k) - 2 = 0, \quad 12 - 7k + k^2 - 2 = 0, \quad k^2 - 7k + 10 = 0$$

$$(k-2)(k-5) = 0, \quad k = 2, \quad 5$$

一般化

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ とおく。ただし、 k は固有値、 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ は固有ベクトルとする。

る。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0$$

自明解以外の解を持つためには、行列式が0でなければならない。

$$\begin{vmatrix} a - k & b \\ c & d - k \end{vmatrix} = 0$$

$$(a - k)(d - k) - bc = 0, \quad ad - (a + d)k + k^2 - bc = 0$$

$$k^2 - (a + d)k + ad - bc = 0$$

k についての二次方程式が得られた。この解が固有値である。

この方程式を「固有方程式」という。

ところで、この方程式に見覚えがないだろうか？ →

W. ハミルトン William Rowan Hamilton 1805 ~ 1865

イギリス、ダブリンの弁護士の子として生まれ。5歳時には、ラテン語、ギリシャ語、ヘブライ語がわかり。8歳時、フランス語、イタリア語を話し、10歳時、サンスクリット語、アラビア語、ペルシャ語、カルデア語、シリア語、ヒンドスタン語、マレー語、マラッタ語、ベンガル語を解したという。当に神童。

17歳時、ニュートンとラグランジェを読んでいた。

20歳時、大恋愛=大失恋をして、自殺しかけた。

その後蒲柳の質の（病気がちの）女性と結婚、看病疲れでアルコール依存症に。実数→複素数→□。□に来る数がハミルトンが創案した「4元数」。

48歳時に、四元数について論文を発表。

晩年は惨めで、酒を飲みながらの研究生活、看取られる人もなく孤独死。

A. ケーリー Arthur Cayley 1821 ~ 1895

イギリス・リッチモンドの商人の息子。ケンブリッジに学び、数学で頭角を現した。ところが、1846年25歳時に、法学院に入り、法律家になった。1850年弁護士開業をした。

1858年「行列論」を著した。この中に「ハミルトン・ケーリーの定理」がある。

1863年、ケンブリッジ大学の教授に迎えられた。

この時、結婚した。42歳であった。

1881年、渡米し、ジョン・ホプキンス大学に籍をおき、米国の数学振興の基礎をつくった。

実数→複素数→四元数→ここに来る数が「8元数」。ケーリーがこれを創案した。

(以上は、『数学セミナー増刊100人の数学者 古代ギリシャから現代まで』[1989 日本評論社刊行]より、森毅先生執筆の該当項目参考)