円板の分割

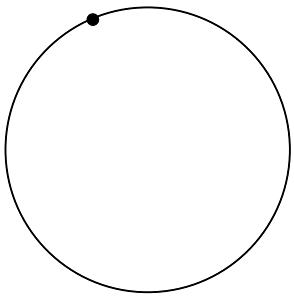
藤野　稔寛

もう１０年以上も前の夏のある日、私は、お寺を借りて開かれた、とある高校の「進学合宿」で数学を教えていた。クーラーのよく効いた控え室で同僚の先生方とごろごろして、雑談をしたり、本を読んだりしていると、ある先生が次のような問題を提示された。

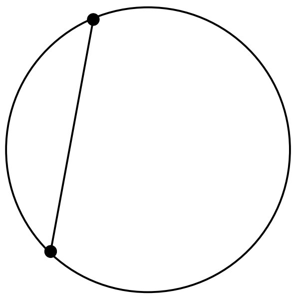
問題 ： 円周上に n 個の点をとり、それらすべてを互いに線分で結ぶ。どの ３本の線分も円の内部では １点で交わることがないとき、これらの線分によってこの円板はいくつの部分に分けられるか？

問題の表現がこのとおりであったかどうかは分からないし、どなたが提出されたのかも残念ながら忘れてしまった。従って、もともとは何かに載っていたものかどうかも今となっては分からない。

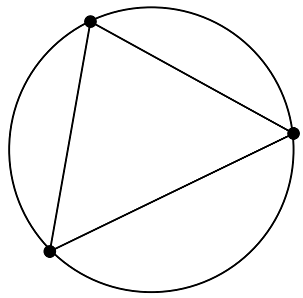
さて、私も含めて何人かの数学の先生たちが、その場で寝転がりながらこの問題に取り組んだ。やってみると意外に難しく、なかなか解けなかったが、この問題がたいへんおもしろいものであることはすぐに分かった。それは、小さい n について実際に図を描いて、分割数を数えてみると気付くことである。点を n 個とったときの分割数を D_n と書くことにし、n が １から ５までの図を次に示す。



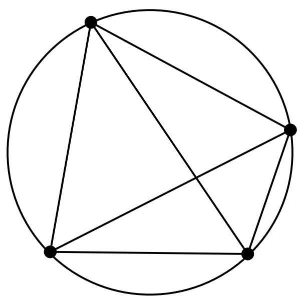
$D_1 = 1$



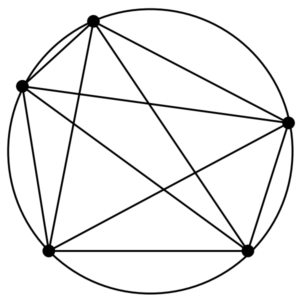
$D_2 = 2$



$D_3 = 4$



$D_4 = 8$



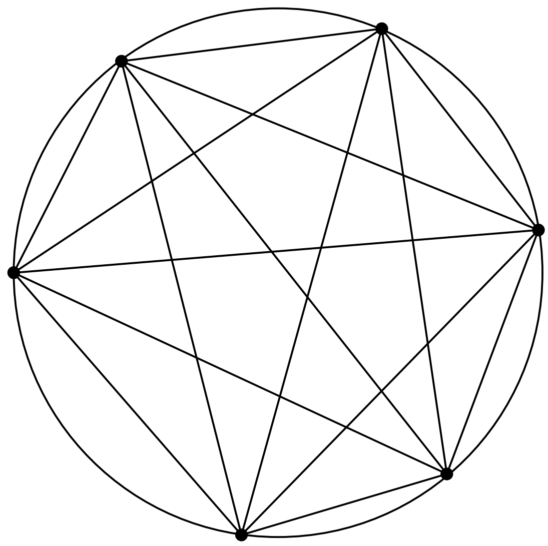
$D_5 = 16$

$n = 1$ のときは線分を １本も引くことができないが、$D_1 = 1$ ということにした。すると、上の図のように、n が １から ５までは

$$D_n = 2^{n-1}$$

となっている。すなわち、初項 １、公比 ２の等比数列であり、倍々に増えているのである。ところが、

$n=6$ のときを確かめてみると、この規則は破れて $D_6=32$ とはならない。次の図のとおり、$D_6=31$ である。



$D_6=31$

つまり、数列 $\{D_n\}$ は、｛１，２，４，８，１６，３１，… ｝である。

従って、この問題は、一見単純な規則に従っているように見える数列であっても、本当の規則はまったく別であるかもしれず、理由のない推定だけで一般項を決定することはできないということを示すおもしろいサンプルになっているのである。その「進学合宿」で、私は幸いにこの問題の解答である正しい一般項を求めることができた。当時は、いろいろと苦心の末、あまりスマートとはいえない方法で解いたように思う。その証拠に、どうやって解いたのか思い出すことができない。今回改めて考え直してみて、割とすっきりとした解答を得ることができたので、以下にそれを述べる。

方針としては、まず、階差数列の第 $(n-1)$ 項 D_n-D_{n-1} を求めることにする。そのために、今、円周上に $(n-1)$ 個の点をとり、それらを互いに結んで、どの３本の線分も円の内部では１点で交わらず、この円板が D_{n-1} 個の領域に分割されているとして、そこへもう１個の点 A を円周上にとる。説明のために、初めの $(n-1)$ 個の点を A の隣りから順に $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ と書くことにすると、新しい分割は、A と $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ を結ぶ線分を書き加えることによって得られる。もちろん、このときも円の内部で３本の線分が１点で交わることはないとする。ここで、A と P_i を結ぶことによって増える分割数は、A と P_j（$i \fallingdotseq j$）がすでに結ばれているかどうかとは無関係なので、それらを独立に求めて足し合わせることによって D_n-D_{n-1} が求められる。さて、そこで、A と P_k を結ぶときにいくつ分割数が増えるか考えよう。A から P_k に向かって線を引いていくとき、すでに引かれている線分と交わるごとにひとつずつ、そして、最後に P_k にたどりついたときにひとつ分割数が増える。では、A から P_k に向かって線を引いていくときに何本の線分と交わるだろうか？ それは、A と P_k の間を何本の線分が横切っているか、を考えればよい。この数は、$P_1 \sim P_{k-1}$ の $(k-1)$ 個の点と $P_{k+1} \sim P_{n-1}$ の $(n-k-1)$ 個の点を互いにすべて結ぶ線分の数

$$(k-1)(n-k-1)\text{本}$$

である。従って、A と P_k を結ぶとき、新たに分割数が

$$(k-1)(n-k-1)+1$$

だけ増える。よって、$n \geqq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} D_n - D_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1}\{(k-1)(n-k-1)+1\} \\ &= \frac{1}{6}n^3 - n^2 + \frac{17}{6}n - 2 \end{aligned}$$

従って、$\{D_n\}$ の階差数列の第 k 項は、

$$\frac{1}{6}(k+1)^3 - (k+1)^2 + \frac{17}{6}(k+1) - 2 = \frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{4}{3}k$$

となり、$n \geqq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} D_n &= D_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{4}{3}k\right) \\ &= 1 + \frac{1}{6}\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{4}{3}\cdot\frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{1}{24}n^4 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{23}{24}n^2 - \frac{3}{4}n + 1 \end{aligned}$$

$n=1$ のとき、この式の値は 1 となり、D_1 と一致する。従って、上の式はすべての自然数 n について成り立つ。

これで先の問題についての解答が得られたわけであるが、これまでの説明では曖昧にしてきたことがある。それは、問題の中に「どの 3本の線分も円の内部では 1点で交わらないとき」とあるが、それは可能か？ という点である。これは、言い換えると、点の数が少ないときに可能なことは明らかなので、円周上に $(n-1)$ 個の点がこの条件を満たすように与えられているとして、もう 1個の点を円周上に同じ条件を満たすようにとれるか？ ということである。もちろんそれは可能である。次にその理由を述べる。

今、円周上に $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ がこの条件を満たすように与えられているとしよう。このとき、これらをすべて互いに結んだ線分の円の内部における交点の数は有限個である。これを $Q_1, Q_2, \cdots,$ Q_m とする。これらはすべて２本の線分の交点である。

ここで、直線 $P_i Q_j$（$1 \leqq i \leqq n-1, 1 \leqq j \leqq m$）のすべてと円周との交点を、$P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ を除いて $R_1, R_2, \cdots, R_l$ とすると、この個数も有限である。当然、新たな点 P_n（上記の A）を $R_1, R_2, \cdots, R_l$ のいずれかにとれば、そこから $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ に結ばれる線分の中には途中に $Q_1, Q_2, \cdots, Q_m$ のいずれかを通るものがあり、その場所では３本の線分が１点で交わることになるので、条件が満たされない。

逆に、$R_1, R_2, \cdots, R_l$ 以外の位置、もちろん $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ とも異なる位置に P_n をとれば、条件は満たされる。従って、任意の n について条件を満たすように P_n をとれることは明らかである。

以上に述べた内容は高校で学習する「数学A」の範囲内である。「数学A」の教科書には平面を直線で分割する問題が出ている。ここで紹介した「円板の分割」は、「平面の分割」より数段難しいが、まったく扱えないものではない。また、

１，２，４，８，１６，３１・・・・

という数列が具体的な図形的意味をもっており、第６項が３２でなくて３１であるということは、数列の学習における導入としてもおもしろいし、先にも述べたように、表面的な規則にとらわれずに本質的な規則性を見つける必要があることを示すサンプルとして有効である。さらに、実際に図を描かせて、円周上に６個の点をとったときの分割数を予想させるといったことは、小･中学校でも可能であろう。ぜひ適当な機会に授業で使ってみて欲しいと思う。

付言すれば、「平面の分割」も「３本の直線が１点で交わらない」という条件の下で考える訳であるが、それが可能である理由、あるいは、その条件を満たす具体的な直線の引き方を生徒に考えさせることは、学習に奥行きを与えることになろう。予想外にいろいろな方法を生徒が思い付いて、楽しい授業になるかもしれない。

８８Ｍ０５　ふじの としひろ
所属 ： 徳島県立鳴門高等学校