’01　秋田大学

解説

(1)　直線 l の傾きを a とすると，l の方程式は

$$y-p^2=a(x-p)$$

すなわち　$y=ax-ap+p^2$

放物線 $y=x^2$ に接することから，$x^2=ax-ap+p^2$ が重解をもつ．

$x^2-ax+ap-p^2=0$ の判別式を D とすると

$$D=0$$

よって　$D=a^2-4(ap-p^2)=0$

ゆえに　$(a-2p)^2=0$　　したがって　$a=2p$

よって　　$l:y=2px-p^2$

同様にして　$m:y=2qx-q^2$

$2px-p^2=2qx-q^2$ を解くと

$p<q$ であるから　$x=\dfrac{p+q}{2}$

このとき　$y=pq$　　ゆえに　$\mathrm{R}\left(\dfrac{p+q}{2},\ pq\right)$

(2)　2 直線 l，m が x 軸となす角をそれぞれ α，β とすると　$\tan\alpha=2p$，$\tan\beta=2q$

よって　$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{2(p-q)}{1+4pq}$$

(3)　$pq=-2$ であるから　$p=-\dfrac{2}{q}$

また，$p<q$，$pq<0$ であるから　$p<0$，$q>0$

よって　$\tan\theta=\dfrac{2\left(-\dfrac{2}{q}-q\right)}{1+4\cdot(-2)}=\dfrac{2}{7}\left(q+\dfrac{2}{q}\right)\geqq\dfrac{2}{7}\cdot 2\sqrt{q\cdot\dfrac{2}{q}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

等号が成り立つのは

$q=\dfrac{2}{q}$　すなわち　$q=\sqrt{2}$ のとき．

このとき　$p=-\sqrt{2}$

ゆえに，$p=-\sqrt{2}$，$q=\sqrt{2}$ のとき最小値　$\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

’01　秋田大学

(4)　点 R から直線 PQ に垂線 RS を下ろすと

$$\tan\theta_1=\frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{PS}},\ \tan\theta_2=\frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{QS}}$$

よって　$\dfrac{1}{\tan\theta_1}+\dfrac{1}{\tan\theta_2}=\dfrac{\mathrm{PS}}{\mathrm{SR}}+\dfrac{\mathrm{QS}}{\mathrm{SR}}=\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{SR}}$

ここで　$\mathrm{PQ}=\sqrt{(q-p)^2+(q^2-p^2)^2}$

$$=(q-p)\sqrt{1+(p+q)^2}$$

また，直線 PQ の方程式は

$y-(p+q)x+pq=0$ であるから

$$\mathrm{SR}=\frac{\left|pq-(p+q)\dfrac{p+q}{2}+pq\right|}{\sqrt{1+(p+q)^2}}$$

したがって　$\dfrac{1}{\tan\theta_1}+\dfrac{1}{\tan\theta_2}=\dfrac{2\{1+(p+q)^2\}}{q-p}$

講評

三角関数のグラフへの応用問題．(1) は有名な性質．(2) 以降も難易度としては基本的．問題を眺めているだけでなく，実際に計算をしていくとすぐに解けるだろう．分数関数の最大・最小は，ⅠＡⅡＢの範囲では相加・相乗平均を使うのが基本的な考え方であることは確認すべき内容．三角関数の基本的な関係をきちんと押えておきたい．