’01　高知大学

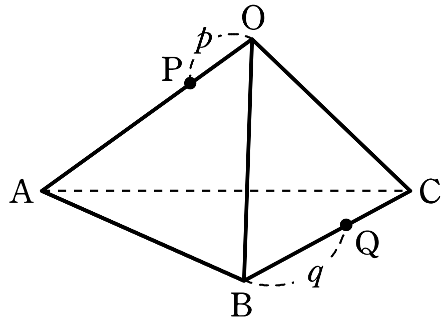
解説

(1)　1 辺の長さが 1 であるから

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=-p\overrightarrow{OA}+(1-q)\overrightarrow{OB}+q\overrightarrow{OC}$

ここで，正四面体の頂点 O，A，B，C は同一平面上にはない．

ゆえに　$k=-p$，$l=1-q$，$m=q$



(2)　$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

よって

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2&=|k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}|^2\\&=k^2+l^2+m^2+2kl\cdot\frac{1}{2}+2lm\cdot\frac{1}{2}+2mk\cdot\frac{1}{2}\\&=p^2+(1-q)^2+q^2-p(1-q)+(1-q)q-qp\\&=p^2+1-2q+q^2+q^2-p+pq+q-q^2-pq\\&=p^2-p+q^2-q+1\end{aligned}$$

(3)　(2) から　$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(q-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}$

また，条件から　$0\leqq p\leqq1$，$0\leqq q\leqq1$

よって，$|\overrightarrow{PQ}|$ は，$p=q=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ をとる．

講評

空間ベクトルの問題で基本的．空間ベクトルは異なる3つのベクトルを使って表すという原則をきちんと適用すれば解ける問題．(3) の長さを出すときに内積を利用して出す(この問題では (2) が誘導になっている)解き方は必須テクニック．最小値の求め方は，いわゆる予選・決勝法と呼ばれるもので，これも確実にできるようにしておかなければならない．