’01　京都大学

解説

$\mathrm{P}(t,\ t^3)$ とすると，点 P における接線 l の傾きは　$3t^2$

$\tan\theta=3t^2$ とおく．

$3t^2=1$ のとき，直線 L は y 軸に平行となり，題意を満たさない．

$3t^2\neq 1$ のとき，直線 L の傾きは

$$\tan(\theta+45^\circ)=\frac{\tan\theta+\tan 45^\circ}{1-\tan\theta\tan 45^\circ}=\frac{1+3t^2}{1-3t^2}$$

よって，直線 L の方程式は　$y=\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}(x-t)+t^3$

ゆえに，$x^3=\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}(x-t)+t^3$ …… ① が，異なる 3 つの実数解をもつ条件を求めればよい．

① から　$(x-t)\left(x^2+tx+t^2-\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}\right)=0$

よって，$x^2+tx+t^2-\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}=0$ が t 以外の異なる 2 つの実数解をもつ条件を求めればよい．

$f(x)=x^2+tx+t^2-\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}$ とおく．

求める条件は $f(t)\neq 0$ かつ $f(x)=0$ の判別式 D について　$D>0$

$$f(t)=3t^2-\frac{1+3t^2}{1-3t^2}=-\frac{1+9t^4}{1-3t^2}$$

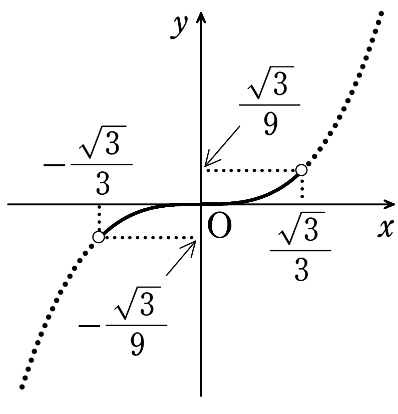
よって，$f(t)\neq 0$ は常に成り立つ．

$$D=t^2-4\left(t^2-\frac{1+3t^2}{1-3t^2}\right)=\frac{9t^4+9t^2+4}{1-3t^2}$$

よって，$D>0$ である条件は　$1-3t^2>0$

ゆえに　$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<t<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

よって，P の範囲は図のようになる．



講評

接線を求める問題．直線の回転と考えると難しいが，傾きを考えれば標準的な難易度の問題になる．考え方をマスターしておきたい問題．