'01 九州大学

解説

(1) 対称点の座標を $(x,\ y)$ とすると，$\left(\dfrac{x+X}{2},\ \dfrac{y+Y}{2}\right)=(p,\ q)$ が成り立つ．

ゆえに $(x,\ y)=(2p-X,\ 2q-Y)$

(2) G 上の任意の点の座標を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とする．xy 平面上の点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ に関する点 P に対称な点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると，(1) から $(X,\ Y)=(2p-x,\ 2q-y)$

よって $Y=X^3+aX^2+bX+c$

$$\iff 2q-y=(2p-x)^3+a(2p-x)^2+b(2p-x)+c$$

$$\iff y=x^3-(a+6p)x^2+(12p^2+4ap+b)x-8p^3-4ap^2-2bp-c+2q$$

これが $y=x^3+ax^2+bx+c$ と一致するとすると

$$\begin{cases} -(a+6p)=a \\ 12p^2+4ap+b=b \\ -8p^3-4ap^2-2bp-c+2q=c \end{cases}$$

これを解くと

$$p=-\frac{1}{3}a,\quad q=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$$

ここで，$\left(-\dfrac{1}{3}a\right)^3+a\left(-\dfrac{1}{3}a\right)^2+b\left(-\dfrac{1}{3}a\right)+c=\dfrac{2}{27}a^3-\dfrac{1}{3}ab+c$

であるから，$\mathrm{A}(p,\ q)$ は G 上の点である．

以上から，G は，点 $\left(-\dfrac{1}{3}a,\ \dfrac{2}{27}a^3-\dfrac{1}{3}ab+c\right)$ に関して対称である．

(3) 対称点の座標を $(x,\ y)$ とすると，$\left(\dfrac{x+X}{2},\ \dfrac{y+Y}{2}\right)=(p,\ Y)$ が成り立つ．

ゆえに $(x,\ y)=(2p-X,\ Y)$

(4) G 上の任意の点の座標を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とする．

直線 $x=p$ に関する点 P に対称な点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると，

(3) から $(X,\ Y)=(2p-x,\ y)$

よって $Y=X^3+aX^2+bX+c$

$$\iff y=(2p-x)^3+a(2p-x)^2+b(2p-x)+c$$

$$\iff y=-x^3+(a+6p)x^2-(12p^2+4ap+b)x+8p^3+4ap^2+2bp+c$$

これは x^3 の係数が -1 であるから，

$y=x^3+ax^2+bx+c$ と一致しない．

以上から，G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でない．

講評

関数の証明問題．3次関数は変曲点で対称になるのは有名な事実なので，知っておいた方が良い．今は，それの証明をする問題．難易度的にも簡単ではないが，証明のやり方は是非とも押えておきたい．