'01　お茶の水女子大学

解説

(1)　$z=\log(-x^2-y^2+3)$ …… ①

を満たす任意の2点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ k)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2,\ k)$ とすると，① から

$$k=\log(-x_1{}^2-y_1{}^2+3),\ k=\log(-x_2{}^2-y_2{}^2+3)$$

が成り立つ．

よって　$x_1{}^2+y_1{}^2=x_2{}^2+y_2{}^2=3-e^k$ …… ②

ここで，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ k)$ とすると，② から

$$\mathrm{PR}^2=x_1{}^2+y_1{}^2=x_2{}^2+y_2{}^2=\mathrm{QR}^2$$

すなわち，任意の2点P，Qに対して，QはPを z 軸の周りに回転したものである．

よって，① の表す曲面は z 軸の周りの回転体である．

ただし　$0\leqq x^2+y^2<3$ から　$0\leqq 3-e^k<3$

よって　$0<e^k\leqq 3$ より　$k\leqq\log 3$

また，$0\leqq z\leqq\log(-x^2-y^2+3)$ で定まる立体 D は，曲面 $z=\log(-x^2-y^2+3)$ と平面 $z=0$ で囲まれた部分であるから，D は z 軸の周りの回転体である．

(2)　xz 平面は $y=0$ であるから　$0\leqq z\leqq\log(3-x^2)$，$x^2<3$

$z=\log(3-x^2)$ とおくと

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2x}{x^2-3}=\frac{2x}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}$$

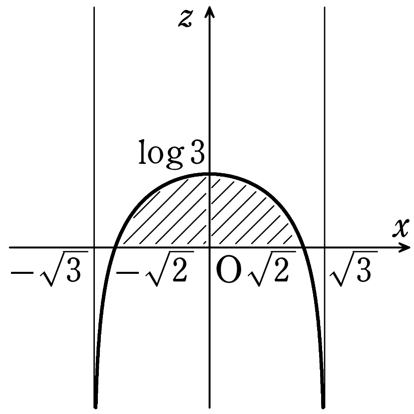
$\dfrac{dz}{dx}=0$ とおくと　$x=0$ (分母 $\neq 0$ で適)

更に　$-\sqrt{3}<x<0$ のとき　$\dfrac{dz}{dx}>0$,

　　$0<x<\sqrt{3}$ のとき　$\dfrac{dz}{dx}<0$

であるから，次の増減表を得る．

x	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$\dfrac{dz}{dx}$		$+$	0	$-$	
z		$\nearrow$	極大	$\searrow$	



ゆえに，$x=0$ のとき極大値 $\log 3$

また　$z=0$ とおくと　$3-x^2=1$ から

$x=\pm\sqrt{2}$

D を xz 平面で切ったときの断面は，

曲線 $z=\log(3-x^2)$ と x 軸 $(z=0)$

で囲まれた部分であるから，図の斜線部分．

ただし，境界線を含む．

(3)　D の体積を V とする．

$z=\log(3-x^2)$ から　$3-x^2=e^z$　　$x^2=3-e^z$

$$V=\pi\int_0^{\log 3} x^2 dz=\pi\int_0^{\log 3}(3-e^z)dz$$

$$=\pi\Big[3z-e^z\Big]_0^{\log 3}$$

$$=\pi(3\log 3-3+1)=\pi(3\log 3-2)$$

講評

回転体の体積の問題．簡単な内容ではないが，丁寧な誘導形式になっているので誘導にきちんとのっていければ，それほど難しくはない．問題文も読みやすいので，丁寧に解いていけば完答出来る問題．解法の流れをきちんと意識しながら解いていきたい．