'01　大阪大学

解説

(1)　点$(2n,\ 0)$から点$(2n+2,\ 0)$へは，点$(2n+1,\ 1)$を通る経路ただ1つで，

点$(2n,\ 2)$から点$(2n+2,\ 0)$へも，点$(2n+1,\ 1)$を通る経路ただ1つであるから

$$a_{n+1}=a_n+b_n$$

点$(2n,\ 0)$から点$(2n+2,\ 2)$へは，点$(2n+1,\ 1)$を通る経路ただ1つで，点$(2n,\ 2)$から点$(2n+2,\ 2)$へは，点$(2n+1,\ 1)$を通る経路と点$(2n+1,\ 3)$を通る経路の2つであるから

$$b_{n+1}=a_n+2b_n$$

(2)　$a_{n+1}+tb_{n+1}=(t+1)a_n+(2t+1)b_n$である．

$t=-1$と仮定すると，$a_{n+1}-b_{n+1}=-b_n$で，

$a_1=b_1=1$，$a_2=2$，$b_2=3$から，$a_1-b_1=0$，$a_2-b_2=-1$となり，$\{a_n-b_n\}$は等比数列とならない．ゆえに，$t+1\neq 0$となる．

このとき　$a_{n+1}+tb_{n+1}=(t+1)\left\{a_n+\dfrac{2t+1}{t+1}b_n\right\}$

よって，$\{a_n+tb_n\}$が等比数列となるのは$t=\dfrac{2t+1}{t+1}$のときである．

したがって，$t^2-t-1=0$から　$t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(3)　(2)より，$t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$で，等比数列$\{a_n+tb_n\}$の初項と公比はともに

$1+t=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$であるから

$a_n+\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})b_n=\dfrac{1}{2^n}(3+\sqrt{5})^n$，$a_n+\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})b_n=\dfrac{1}{2^n}(3-\sqrt{5})^n$となる．

ゆえに　$a_n=-\dfrac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\{(3+\sqrt{5})^n(1-\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})^n(1+\sqrt{5})\}$，

$$b_n=\frac{1}{2^n\sqrt{5}}\{(3+\sqrt{5})^n-(3-\sqrt{5})^n\}$$

'01　大阪大学

(4)　(3) から　$\dfrac{a_n}{b_n}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(3+\sqrt{5})^n(1-\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})^n(1+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})^n-(3-\sqrt{5})^n}$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}-\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)^n(1+\sqrt{5})}{1-\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)^n}$$

ここで　$0<\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}<1$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

講評

昔は，確率と漸化式という形でかなり良く出題されていたタイプの問題．本問は確率ではないが，本質的には同じタイプ．漸化式の出し方をきちんと押さえておきたい．漸化式さえ作ってしまえば，あとは誘導にのっていけばそれほど難しくはない．