’01 滋賀医科大学

xy 平面上の 2 曲線 C_+ と C_- を次の式で定義する．

$$C_+ : x^2-2y^2=1 \quad (x>0,\ y>0)$$

$$C_- : x^2-2y^2=-1 \ (x>0,\ y>0)$$

また，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ を次式で定める：

$$\begin{cases} u=-x+2y \\ v=x-y \end{cases}$$

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は x，y がともに整数であるとき整数点という．

(1) $\mathrm{P}(x,\ y)$ が曲線 C_+ 上の整数点ならば，$\mathrm{Q}(u,\ v)$ は曲線 C_- 上の整数点であり，$\mathrm{P}(x,\ y)$ が曲線 C_- 上の整数点ならば，$x=y=1$ の場合を除いて，$\mathrm{Q}(u,\ v)$ は曲線 C_+ 上の整数点であることを示せ．

(2) $\mathrm{P}(x,\ y)$ が C_+ または C_- の整数点で $y \neq 1$ ならば $0<v<y$ であることを示せ．

(3) $(\sqrt{2}+1)^n=x_n+y_n\sqrt{2}$ (x_n，y_n は整数，n は自然数) と表す．
点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ は曲線 C_+ または C_- 上にあることを示せ．

(4) 曲線 C_+ または C_- 上の整数点は $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ (n は自然数) に限ることを示せ．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$ を求めよ．