’01　東京工業大学

解説

j 回目に取り出したカードの番号を x_j とすると

$$X_j = x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_j$$

(1)　$X_1=1$ となるのは $x_1=1$ のときであるから

$$P_N(1) = \frac{1}{N}$$

$X_1=2$ となるのは $x_1=2$ のとき，

$X_2=2$ となるのは $x_1=x_2=1$ のときであるから

$$P_N(2) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} = \frac{N+1}{N^2}$$

$X_1=3$ となるのは $x_1=3$ のとき，

$X_2=3$ となるのは $(x_1=2,\ x_2=1)$　または　$(x_1=1,\ x_2=2)$ のとき，

$X_3=3$ となるのは $x_1=x_2=x_3=1$ のときであるから

$$P_N(3) = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} + \frac{1}{N^3} = \frac{(N+1)^2}{N^3}$$

(2)　$X_2=4$ のとき　$(x_1,\ x_2)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$

$X_3=4$ のとき　$(x_1,\ x_2,\ x_3)=(1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1)$

$X_4=4$ のとき　$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$

よって　$P_3(4) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{37}{81}$

$X_2=5$ のとき　$(x_1,\ x_2)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

$X_3=5$ のとき　$(x_1,\ x_2,\ x_3)=(1,\ 1,\ 3),\ (1,\ 2,\ 2),\ (1,\ 3,\ 1),$
$(2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 2,\ 1),\ (3,\ 1,\ 1)$

$X_4=5$ のとき　$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(1,\ 1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 2,\ 1),$
$(1,\ 2,\ 1,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1,\ 1)$

$X_5=5$ のとき　$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)=(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$

よって　$P_3(5) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 6 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5$

$$= \frac{121}{243}$$

'01 東京工業大学

(3) N 枚のカードについて，$X_i=k$ となる確率を $P_N(X_i=k)$ と表す．

$P_N(k)=P_N((X_1=k)\cup(X_2=k)\cup\cdots\cdots\cup(X_k=k))$

$X_1=k$，$X_2=k$，$\cdots\cdots$，$X_k=k$ のうち，どの 2 つも互いに排反であるから

$P_N(k)=P_N(X_1=k)+P_N(X_2=k)+\cdots\cdots+P_N(X_k=k)$

$1\leqq i\leqq k$ のとき，$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_i=k$ となる $(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_i)$ の組の数を求める．

x_i は 1 以上の整数であるから，これは k 個の○を 1 列に並べたときにできる $k-1$ 個の隙間から $i-1$ 個を選ぶ組合せの数に等しい．

すなわち　${}_{k-1}\mathrm{C}_{i-1}$

ゆえに　$$P_N(k)=\sum_{i=1}^{k}{}_{k-1}\mathrm{C}_{i-1}\left(\frac{1}{N}\right)^i=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}{}_{k-1}\mathrm{C}_{i-1}\left(\frac{1}{N}\right)^{i-1}$$

$$=\frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

講評

確率と漸化式の標準的問題．文字ばかりが出てくると抽象的で非常に考えにくいので，実際に数字を当てはめて考えていくようにしていきたい．数字を当てはめて，上くに規則性を発見すれば，あとはその規則性を文字に適用させればよい．この問題の解き方の流れをきちんとマスターしておきたい．