'01　東京都立大学

解説

(1)　$J^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

$J^3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$

(2)　(1) から

$aE+bJ+cJ^2=\begin{pmatrix}a+c&b&c\\b&a+2c&b\\c&b&a+c\end{pmatrix}$

$aE+bJ+cJ^2=O$ が成り立つならば

$a+c=0$，$b=0$，$c=0$，$a+2c=0$

よって　$a=b=c=0$

(3)　$A=dE+eJ$ から　$A^2=d^2E+2deJ+e^2J^2$

また　$A^3=(dE+eJ)^3$

$=d^3E+3d^2eJ+3de^2J^2+e^3J^3$

ここで，(1) より $J^3=2J$ であるから

$A^3=d^3E+(3d^2e+2e^3)J+3de^2J^2$

よって

$-A+A^2+A^3-kE$

$=(-d+d^2+d^3-k)E+(-e+2de+3d^2e+2e^3)J+(e^2+3de^2)J^2$

ゆえに，与えられた等式は

$(d^3+d^2-d-k)E+(3ed^2+2ed+2e^3-e)J+(3e^2d+e^2)J^2=O$

と同値である．

よって，(2) から

$d^3+d^2-d-k=e(3d^2+2d+2e^2-1)$

$=e^2(3d+1)=0$

$e\fallingdotseq 0$ であるから

$d^3+d^2-d-k=3d^2+2d+2e^2-1=3d+1=0$

したがって　$d=-\dfrac{1}{3}$，$e=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$k=\dfrac{11}{27}$

講評

行列の計算問題．正方行列以外は計算する機会自体が非常に少ないので，見た目に圧倒されてしまうが，実際は誘導が丁寧にされているので，誘導にのってきちんと計算をしていけば解ける問題．基本的な計算を学ぶために良い問題．