'02 名古屋大学

解説

$x^a=y^b=z^c=xyz=10^k$ とおくと，$x>0$，$y>0$，$z>0$ から

$a\log_{10}x=b\log_{10}y=c\log_{10}z=\log_{10}x+\log_{10}y+\log_{10}z=k$

$a>0$，$b>0$，$c>0$ であるから　$\log_{10}x=\dfrac{k}{a}$，$\log_{10}y=\dfrac{k}{b}$，$\log_{10}z=\dfrac{k}{c}$

ゆえに　$\dfrac{k}{a}+\dfrac{k}{b}+\dfrac{k}{c}=k$

$x\neq 1$ であるから　$k\neq 0$　よって　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ を満たすことが必要．

ここで，$1\leqq a\leqq b\leqq c$ であるから　$1\geqq\dfrac{1}{a}\geqq\dfrac{1}{b}\geqq\dfrac{1}{c}>0$

ゆえに　$1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{a}$

よって　$a\leqq 3$

a は正の整数であるから　$a=1,\ 2,\ 3$

[1]　$a=1$ のとき　$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$ となり不適．

[2]　$a=2$ のとき　$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$ から　$bc=2b+2c$

　ゆえに　$(b-2)(c-2)=4$ …… ①

　$2\leqq b\leqq c$ であるから　$0\leqq b-2\leqq c-2$

　また，$b-2$，$c-2$ は整数であるから，

　① より　$(b-2,\ c-2)=(1,\ 4),\ (2,\ 2)$

　ゆえに　$(b,\ c)=(3,\ 6),\ (4,\ 4)$

[3]　$a=3$ のとき　$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{3}$ から　$2bc=3b+3c$

　よって　$4bc=6b+6c$

　ゆえに　$(2b-3)(2c-3)=9$ …… ②

　$3\leqq b\leqq c$ であるから　$3\leqq 2b-3\leqq 2c-3$

　また，$2b-3$，$2c-3$ は整数であるから，② より　$(2b-3,\ 2c-3)=(3,\ 3)$

　ゆえに　$(b,\ c)=(3,\ 3)$

以上から　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

逆に，これらの $(a,\ b,\ c)$ に対し，関係式を満たす 1 とは異なる正の実数の組

$(x,\ y,\ z)=\left(10^{\frac{1}{a}},\ 10^{\frac{1}{b}},\ 10^{\frac{1}{c}}\right)$ が存在する．

講評

　対数と整数問題の融合問題．基本的な式変形を忠実に行っていけば，有名な整数問題に帰着する．条件式からも，変形のやり方は容易に見えてくるので，それほど難しくは無い問題．確実に完答しておきたい．