’02　横浜国立大学

解説

$\log_y z=A$，$\log_z x=B$，$\log_x y=C$ とおくと　$ABC=1$ …… ①

第 1 式から　$A+B+C=\dfrac{7}{2}$ …… ②

第 2 式から　$\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{C}=\dfrac{7}{2}$ …… ③

①，③ から　$AB+BC+CA=\dfrac{7}{2}$

よって，A，B，C は　$t^3-\dfrac{7}{2}t^2+\dfrac{7}{2}t-1=0$

すなわち　$\left(t-\dfrac{1}{2}\right)(t-1)(t-2)=0$ …… ④　の解．

ここで，$xyz=2^{10}>1$ かつ $x\leqq y\leqq z$ であるから　$z>1$

よって　$\log_{10}x\leqq\log_{10}z$，$\log_{10}z>0$ から　$B\leqq1$

$B=1$ とすると $x=z$ から　$x=y=z$

よって $A=B=C$ となり，④ を満たさないから不適．

ゆえに $B<1$ であるから，④ より　$B=\dfrac{1}{2}$

よって　$(A,\ B,\ C)=\left(1,\ \dfrac{1}{2},\ 2\right)$，$\left(2,\ \dfrac{1}{2},\ 1\right)$

ゆえに　$\begin{cases} y=z \\ x=z^{\frac{1}{2}} \\ y=x^2 \end{cases}$，　$\begin{cases} z=y^2 \\ x=z^{\frac{1}{2}} \\ x=y \end{cases}$

よって　$(x,\ y,\ z)=(x,\ x^2,\ x^2)$，$(x,\ x,\ x^2)$

ゆえに　$xyz=2^{10}$ から　$x=4$，$4\sqrt{2}$

よって　$(x,\ y,\ z)=(4,\ 16,\ 16)$，$(4\sqrt{2},\ 4\sqrt{2},\ 32)$

講評

対数の計算の問題．難易度的には標準的な問題．底をそろえると，逆に見づらくなって計算の方針が立てにくくなる．また，式の変形の過程で三次関数の解と係数の関係を使うのも，多少見にくい部分があるが，このような解き方もあるので，流れをつかんでおきたい．