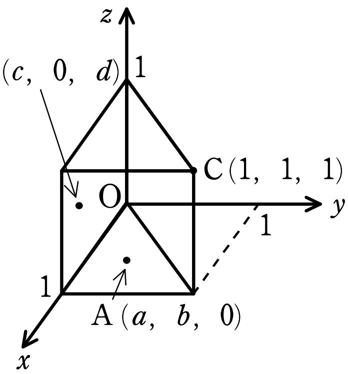
’04　九州大学

解説

(1)　三角柱は右の図のようになる．



求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とおく．

$|\vec{e}|^2=1$ から　$x^2+y^2+z^2=1$　…… ①

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e}=ax+by=0$　…… ②

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\vec{e}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\vec{e}=x+y+z=0$　…… ③

$0\leqq a\leqq 1$，$0\leqq b\leqq 1$，$a\geqq b$ かつ $(a,\ b)\neq(0,\ 0)$

であるから　$a\neq 0$

よって，②，③ から　$x=-\dfrac{b}{a}y$，$z=\dfrac{b-a}{a}y$

これを ① に代入すると　$\dfrac{b^2}{a^2}y^2+y^2+\dfrac{(b-a)^2}{a^2}y^2=1$

よって　$2(a^2-ab+b^2)y^2=a^2$

$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ より，$a^2-ab+b^2=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\neq 0$ であるから

$$y=\pm\frac{a}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}$$

したがって，求める単位ベクトルは

$$\left(\mp\frac{b}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}},\ \pm\frac{a}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}},\ \mp\frac{a-b}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}\right)\quad\text{(複号同順)}$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{e}|=\dfrac{1}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}\cdot|bc+(a-b)d|$

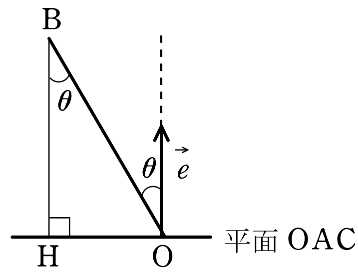
ここで，$b\geqq 0$，$c\geqq 0$，$a-b\geqq 0$，$d\geqq 0$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{e}|=\frac{bc+(a-b)d}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}$$

(2)　$\triangle\mathrm{OAC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)\cdot 3-(a+b)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}$$



また，点 B から平面 OAC に垂線 BH を引き，

$\angle\mathrm{OBH}=\theta\ (0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ)$ とする．

$$\mathrm{BH}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\vec{e}||\cos\theta|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{e}|=\frac{bc+(a-b)d}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}$$

よって，求める体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}\cdot\frac{bc+(a-b)d}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}=\frac{bc+(a-b)d}{6}$$

'04　九州大学

(3)　a，b，c を固定して，$V=\dfrac{(a-b)d+bc}{6}$ を d の1次関数と見る．

[1]　$a=b$ のとき　$V=\dfrac{bc}{6}$

ここで，$0<b=a\leqq 1$，$0\leqq c\leqq 1$ であるから，$b=c=1$ のとき最大値　$\dfrac{1}{6}$

このとき，$a=b=1$ から

$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ d)\ (0\leqq d\leqq 1)$

[2]　$a>b$ のとき

$d=1$ で最大値　$V=\dfrac{bc+a-b}{6}$

a，b を固定して，$V=\dfrac{bc+a-b}{6}$ を c の1次関数と見る．

(i)　$b=0$ のとき

$V=\dfrac{a}{6}$ であるから，$a=1$（これらは $a>b$ を満たす）のとき最大値　$\dfrac{1}{6}$

したがって　$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(c,\ 0,\ 1)\ (0\leqq c\leqq 1)$

(ii)　$b>0$ のとき

$c=1$ で最大値　$V=\dfrac{a}{6}$

これは，$a=1$ のとき最大値 $\dfrac{1}{6}$ をとる．

ここで，$a>b$，$b>0$ から　$0<b<1$

したがって　$\mathrm{A}(1,\ b,\ 0)\ (0<b<1)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$

[1]，[2] から最大値 $\dfrac{1}{6}$ で，

このとき　$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ d)\ (0\leqq d\leqq 1)$

または　$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(c,\ 0,\ 1)\ (0\leqq c\leqq 1)$

または　$\mathrm{A}(1,\ b,\ 0)\ (0<b<1)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$

講評

空間ベクトルのやや発展的な問題．ただし，計算の方法は基本的であるので，ゆっくりと解けば完答できる問題．解答の流れを意識しながら演習したい．