’04　大阪大学

解説

(1)　$|z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n|^2-(|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots\cdots+|z_n|^2)$

$=(z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\cdots\cdots+\overline{z_n})-(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+\cdots\cdots+z_n\overline{z_n})$

$=\displaystyle\sum_{p=2}^{n}\sum_{q=1}^{p-1}(z_p\overline{z_q}+\overline{z_p}z_q)$　$\cdots\cdots$ ①

ここで，$\arg z_k=\alpha_k$，$|z_k|=r_k$ とすると

$z_p\overline{z_q}+\overline{z_p}z_q$

$=r_p(\cos\alpha_p+i\sin\alpha_p)r_q(\cos\alpha_q-i\sin\alpha_q)+r_p(\cos\alpha_p-i\sin\alpha_p)r_q(\cos\alpha_q+i\sin\alpha_q)$

$=r_pr_q(2\cos\alpha_p\cos\alpha_q+2\sin\alpha_p\sin\alpha_q)=2r_pr_q\cos(\alpha_p-\alpha_q)$

ここで，$0°\leqq\alpha_p\leqq 90°$，$0°\leqq\alpha_q\leqq 90°$ から　$-90°\leqq\alpha_p-\alpha_q\leqq 90°$

よって　$\cos(\alpha_p-\alpha_q)\geqq 0$

ゆえに　$z_p\overline{z_q}+\overline{z_p}z_q\geqq 0$

よって，$\displaystyle\sum_{p=2}^{n}\sum_{q=1}^{p-1}(z_p\overline{z_q}+\overline{z_p}z_q)\geqq 0$ であるから，① より

$|z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n|^2-(|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots\cdots+|z_n|^2)\geqq 0$

すなわち

$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots\cdots+|z_n|^2\leqq|z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n|^2$

(2)　$0°\leqq\theta_k\leqq 90°$ であるから，$z_k=\cos\theta_k+i\sin\theta_k$ とおいて (1) が利用できる．

条件から

$|z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n|^2$

$=|\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots\cdots+\cos\theta_n+i(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots\cdots+\sin\theta_n)|^2$

$=(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots\cdots+\cos\theta_n)^2+(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots\cdots+\sin\theta_n)^2$

$=1+(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots\cdots+\sin\theta_n)^2$

また　$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots\cdots+|z_n|^2=1^2+1^2+\cdots\cdots+1^2=n$

よって，(1) から　$n\leqq 1+(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots\cdots+\sin\theta_n)^2$

すなわち　$n-1\leqq(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots\cdots+\sin\theta_n)^2$

$0°\leqq\theta_k\leqq 90°$ であるから　$\sin\theta_k\geqq 0$

よって　$\sqrt{n-1}\leqq\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots\cdots+\sin\theta_n$

講評

複素数を利用した証明問題．三角関数の不等式を極形式を利用して証明する問題．(1) の証明が出来るかどうかが鍵になる．難しい問題であるが，ある程度の難度の大学を受験するなら，出来るようにしておきたい問題．