'04　芝浦工業大学

解説

(1)　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=h$ の交点の x 座標は $\pm\sqrt{h}$ であるから，図 2 より，求める断面積 $S(h)$ は　$S(h)=2\int_0^{\sqrt{h}}(h-x^2)dx=2\left[hx-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{h}}=\frac{4}{3}h\sqrt{h}$

(2)　こぼれはじめたときの水面を表す直線は，点 $(2,\ 4)$ を通るから，その方程式は，$y=a(x-2)+4$ とおける．

このとき，$x^2=a(x-2)+4$ とすると　$(x-2)\{x-(a-2)\}=0$

ゆえに　$x=2,\ a-2$

よって　$T(a)=\int_{a-2}^{2}\{a(x-2)+4-x^2\}dx=-\int_{a-2}^{2}(x-2)\{x-(a-2)\}dx$

$$=\frac{1}{6}\{2-(a-2)\}^3=\frac{(4-a)^3}{6}$$

(3)　(2) において，$a=1$ のときであるから，(2) より　$T(1)=\frac{9}{2}$

このときの水面の高さを h とすると，(1) から　$\frac{4}{3}h\sqrt{h}=\frac{9}{2}$

よって　$h=\frac{9}{4}$

(4)　$h=2$ のとき，(1) から　$S(2)=\frac{8\sqrt{2}}{3}$

このとき，(2) から　$\frac{(4-a)^3}{6}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$

よって　$(4-a)^3=(2\sqrt{2})^3$

ゆえに　$a=4-2\sqrt{2}$（これは $0<a<4$ を満たす）

講評

定積分の基本的な問題．形としては珍しいが，誘導も丁寧についており，結局は放物線と直線で囲まれる部分の面積の問題に帰着できる．文章をきちんと読んで，確実に取れるようにしておきたい問題．