’04　信州大学

解説

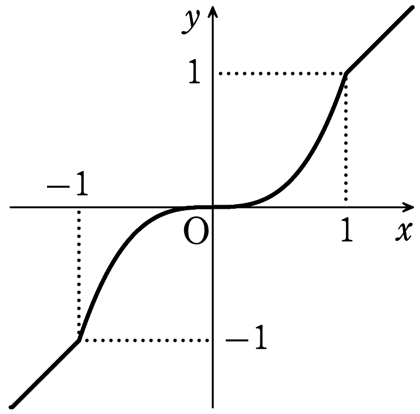
(1)　$|x|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} x^n=0$ であるから　$f(x)=\dfrac{x^5+x^3}{x^2+1}=\dfrac{x^3(x^2+1)}{x^2+1}=x^3$

$x=1$ のとき　$f(x)=\dfrac{1+1+1}{1+1+1}=1$

$x=-1$ のとき　$f(x)=\dfrac{-1-1-1}{1+1+1}=-1$

$|x|>1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ であるから

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{1}{x^{2n-5}}+\dfrac{1}{x^{2n-3}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n-2}}+\dfrac{1}{x^{2n}}}=x$$



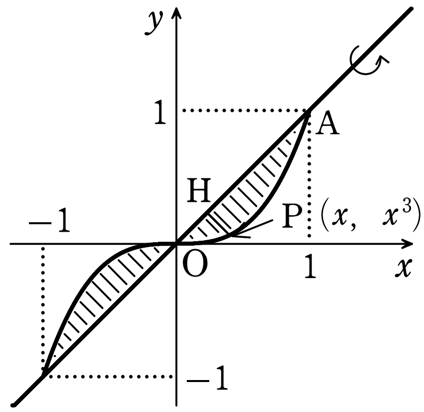
したがって，グラフは右図のようになる．

(2)　2 点を結ぶ線分は $y=x$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ である．

グラフの対称性から，求める体積は $0\leqq x\leqq 1$ の部分の回転体の体積の 2 倍である．

O (0，0)，A (1，1) とすると　$\mathrm{OA}=\sqrt{2}$

$0\leqq x\leqq 1$ とし，$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ x^3)$ から線分 OA に垂線 PH を下ろし，$\mathrm{OH}=t$ とおく．求める体積を V とすると $V=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{PH}^2dt$ と表される．

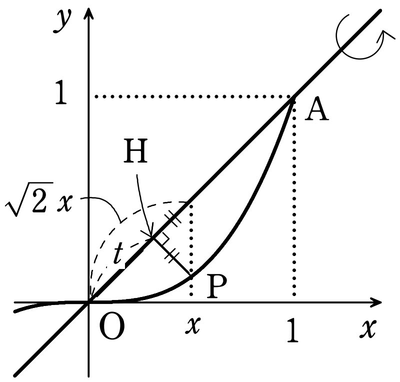


’04　信州大学

ここで　$\mathrm{PH}=\dfrac{|x-x^3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{x-x^3}{\sqrt{2}}$

また　$t=\sqrt{2}\,x-\dfrac{x-x^3}{\sqrt{2}}=\dfrac{x+x^3}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$dt=\dfrac{1+3x^2}{\sqrt{2}}dx$



t	$0\longrightarrow\sqrt{2}$
x	$0\longrightarrow 1$

よって　$$V=2\pi\int_0^1\left(\frac{x-x^3}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1+3x^2}{\sqrt{2}}dx$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1(x^6-2x^4+x^2)(3x^2+1)dx$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1(3x^8-5x^6+x^4+x^2)dx$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{x^9}{3}-\frac{5}{7}x^7+\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{16}{105}=\frac{8\sqrt{2}}{105}\pi$$

講評

回転体の体積の問題．関数自体も極限を含む式で，計算は面倒だが基本的．回転体の体積もよくある形の問題なので，是非とも解けるようにしておきたい．