’04　鳥取大学

解説

(1)　$h'(x)=\sqrt{1+x^2}+\dfrac{x\cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

(2)　$k'(x)=\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{2(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$

$=2\sqrt{1+x^2}$

(3)　$L=\displaystyle\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$

(4)　極方程式 $r=\theta$ で定義される曲線上の点を直交座標で表すと

$$x=r\cos\theta=\theta\cos\theta,\quad y=r\sin\theta=\theta\sin\theta$$

よって　$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta-\theta\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=\sin\theta+\theta\cos\theta$

したがって，求める曲線の長さ L は

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{(\cos\theta-\theta\sin\theta)^2+(\sin\theta+\theta\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}k'(\theta)\,d\theta$ (ただし，$k(x)$ は (2) の関数である)

ゆえに　$L=\dfrac{1}{2}\Big[k(\theta)\Big]_0^{2\pi}=\dfrac{1}{2}\left\{2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\log\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right\}$

$$=\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\log\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$$

講評

曲線の長さの問題．難易度的には基礎的な問題．いかにもの形で誘導がされているので，きちんとそれに乗れば良い．ただ，極方程式で表されているものを扱う機会が少ないので，その部分をきちんと押えておきたい．