'04　東京慈恵会医科大学

解説

(1)　$f(x)=x^3-3b^2x+2a(4a^2-3b^2)=(x+2a)(x^2-2ax+4a^2-3b^2)$

$x^2-2ax+4a^2-3b^2=0$ を解くと　$x=a\pm\sqrt{a^2-(4a^2-3b^2)}=a\pm\sqrt{3(a^2-b^2)}\,i$

よって，A の座標は　$(-2a,\ 0)$

B の座標は　$\left(a,\ \sqrt{3(a^2-b^2)}\right)$

(2)　M の座標は　$\left(-\dfrac{a}{2},\ \dfrac{\sqrt{3(a^2-b^2)}}{2}\right)$

$f'(x)=3x^2-3b^2$ であるから，$f'(x)=0$ の解は $x=\pm b$ であり，F，F$'$ の座標は $(b,\ 0)$，$(-b,\ 0)$ である．

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{FM}+\mathrm{F'M}&=\sqrt{\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3(a^2-b^2)}{4}}+\sqrt{\left(b-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3(a^2-b^2)}{4}}\\&=\sqrt{\frac{4b^2+4ab+a^2+3a^2-3b^2}{4}}+\sqrt{\frac{4b^2-4ab+a^2+3a^2-3b^2}{4}}\\&=\sqrt{\left(\frac{2a+b}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{2a-b}{2}\right)^2}=\frac{2a+b}{2}+\frac{2a-b}{2}=2a\end{aligned}$$

(3)　F，F$'$ を焦点とし，M を通る楕円を C とする．

(2) から，楕円 C 上の点から 2 つの焦点までの距離の和は $2a$ である．したがって，

楕円 C の方程式は　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-b^2}=1$

この楕円の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{a^2-b^2}=1$$

よって，楕円 C の点 M における接線の方程式は

$$-\frac{x}{2a}+\frac{\sqrt{3}\,y}{2\sqrt{a^2-b^2}}=1\quad\cdots\cdots ①$$

① は点 A$(-2a,\ 0)$，B$\left(a,\ \sqrt{3(a^2-b^2)}\right)$ を通るから，直線 AB に他ならない．

講評

方程式の解と関数の関係．2次曲線の知識も混じっているので，多少解きにくいイメージになるかもしれないが，きちんと押えていけば基本的な問題．確実に取れるようにしておきたい．