'04 東京都立大学

解説

(1) $F_n(t)\left(t+\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{t^n-\dfrac{1}{t^n}}{t-\dfrac{1}{t}}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{t-\dfrac{1}{t}}\left(t^{n+1}-\dfrac{1}{t^{n+1}}+t^{n-1}-\dfrac{1}{t^{n-1}}\right)$

$=F_{n+1}(t)+F_{n-1}(t)$

(2) 証明) [1] $n=1$ のとき $F_1(t)=1$ から $f_1(x)=1$

$n=2$ のとき $F_2(t)=t+\dfrac{1}{t}$ から $f_2(x)=x$

[2] $n=k$, $k+1$ のとき与えられた命題が成り立つ，すなわち，

$F_k(t)=f_k(x)$, $F_{k+1}(t)=f_{k+1}(x)$ となる多項式 $f_k(x)$, $f_{k+1}(x)$ が存在すると仮定する．

(1) から $F_{k+2}(t)=F_{k+1}(t)\left(t+\dfrac{1}{t}\right)-F_k(t)=f_{k+1}(x)\cdot x-f_k(x)$

$f_{k+1}(x)\cdot x-f_k(x)$ は多項式であるから $f_{k+2}(x)=f_{k+1}(x)\cdot x-f_k(x)$

よって，$n=k+2$ のときにも与えられた命題は成り立つ．

[1], [2] からすべての自然数 n に対して与えられた命題は成り立つ．

よって，上より

$f_1(x)=1$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=f_2(x)\cdot x-f_1(x)=x\cdot x-1=x^2-1$

(3) (2) の証明から $f_{n+2}(x)=xf_{n+1}(x)-f_n(x)$

ゆえに $f_{n+2}(0)=-f_n(0)$

よって

n が偶数のとき $f_n(0)=-f_{n-2}(0)=\cdots\cdots=(-1)^{\frac{n-2}{2}}f_2(0)=0$

n が奇数のとき $f_n(0)=-f_{n-2}(0)=\cdots\cdots=(-1)^{\frac{n-1}{2}}f_1(0)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$

(4) $x=t+\dfrac{1}{t}=\cos\theta+i\sin\theta+\cos\theta-i\sin\theta=2\cos\theta$

ゆえに $f_n(2\cos\theta)=F_n(t)=\dfrac{\cos n\theta+i\sin n\theta-\cos n\theta+i\sin n\theta}{\cos\theta+i\sin\theta-\cos\theta+i\sin\theta}=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$

よって，等式は成り立つ．

講評

漸化式の帰納法による証明問題．難易度的には基礎的で，誘導も分かりやすく，解きやすい問題．漸化式の証明問題は，帰納法を利用するのが定石なので，きちんとできるようにしておきたい問題．