’99 北海道医療大学

解答・解説

（1） $\alpha<\beta$ に注意しながら，解の公式を適用すると，

$$\alpha=2-\sqrt{2}\ ,\ \beta=2+\sqrt{2}$$

（2）（a） $\alpha+\beta=4$ （b） $\alpha\beta=2$

（c） $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=2\cdot4=8$ （d） $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{4}{2}=2$

（3）（a）
$$\begin{aligned}\text{与式}&=(\alpha+\beta)+\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)+\cdots+\alpha^{n-1}\beta^{n-1}(\alpha+\beta)\\&=(\alpha+\beta)\{1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2+\cdots+(\alpha\beta)^{n-1}\}\\&=4(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})\end{aligned}$$

となり，括弧内が初項 1，公比 2，項数 n の等比数列の和になるので，

$$\text{与式}=4\cdot\frac{2^n-1}{2-1}=4(2^n-1)$$

（b）
$$\text{与式}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha+\beta}{\alpha^k\beta^k}=(\alpha+\beta)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^k=4\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=4\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=4\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

講評

対称式の関係を利用した問題．難易度としては基本的であるが，対称式の関係を理解していないと，難しいだろう．『すべての対称式は基本対称式で表せる』ということは式変形の基礎として理解しておこう．

（1)がなければ，解と係数の関係を利用して答えを出すほうがよく，解と係数の関係と対称式の利用は，非常にポピュラーなものになっている．