'99 山口大学

解説

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$ が集合 A の要素であると仮定する．このとき $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}=a+b\sqrt{2}$ を満たす整数 a，b が存在する．すなわち　$a+b\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

よって　$2a+1=\sqrt{3}-2\sqrt{2}b$

両辺を 2 乗して　$4a^2+4a+1=3-4\sqrt{6}b+8b^2$

整理して　$2b\sqrt{6}=4b^2-2a^2-2a+1$

a，b は整数であるから $2b$，$4b^2-2a^2-2a+1$ はともに整数で，$\sqrt{6}$ が無理数であることより　$b=0$　　このとき　$2a^2+2a-1=0$

これを満たす整数 a は存在しないから矛盾．

よって，背理法により，$\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$ は A の要素ではない．

(2) B，C との共通部分を考えるから，D の要素として整数であるものだけを考えればよい．

$x^2-2(n+1)x+n^2=0$ を n について整理すると　$n^2-2xn+(x^2-2x)=0$

ゆえに　$n=x\pm\sqrt{x^2-(x^2-2x)}$　　　よって　$n=x\pm\sqrt{2x}$ と書ける．

n は自然数であるから $\sqrt{2x}$ は整数でなければならない．

よって，x は $x=2\cdot m^2$（m は整数）という形で書ける．

このような x は $1\leqq x\leqq 20$ の範囲では 2，8，18 のみであり，それぞれ対応する自然数 n は $4\,(x=2)$，$8\pm4\,(x=8)$，$18\pm6\,(x=18)$ となる．

よって，$C\cap D=\{2,\ 8,\ 18\}$ であり，

$B\cup(C\cap D)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 18\}$，

$B\cap\overline{D}=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}$

講評

集合と証明の問題．基本的な問題だが，背理法も若干手が加えられており，集合の問題も計算のやり方をきちんと押さえておかないと難しい．是非とも完答出来るようにしておきたい問題．