’00　東北大学

解説

輪といっしょに回転する立場で考えるとき，遠心力を用いて，力のつりあいの式を立てる。

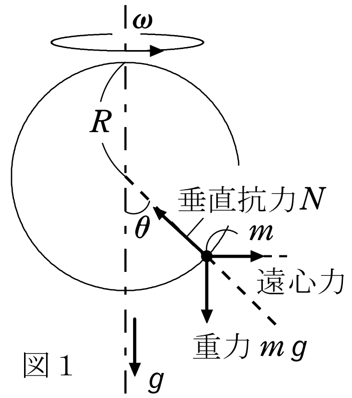

図１

(1)(a)　重力：mg　　遠心力：$mR\sin\theta\cdot\omega^2$

　垂直抗力：N　　図１

(b)　$\theta=\theta_0$ のときのつりあいの式を立てる。

水平方向：$N\sin\theta_0-mR\sin\theta_0\cdot\omega^2=0$

鉛直方向：$N\cos\theta_0-mg=0$

よって

$$\cos\theta_0=\frac{g}{R\omega^2}$$

(c)　図２のように x 軸と原点 O をとり，接線方向の小球の加速度を a として，運動方程式を立てる。

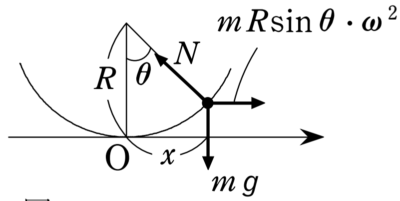

図２

$$ma=-mg\sin\theta+mR\sin\theta\cdot\omega^2\cdot\cos\theta$$

$\sin\theta=\theta$，$\cos\theta=1$ より

$$\begin{aligned}ma&=-mg\theta+mR\omega^2\theta\\&=-m(g-R\omega^2)\theta\\&=-m(g-R\omega^2)\frac{x}{R}\\&=-Kx\end{aligned}$$

よって　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g-R\omega^2}}$

(2)　$0<\mu<1$，$\tan 45^\circ=1$，$\mu=\tan\theta$ の条件から，輪が回転しないときは，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ の位置に止まっていることはできない。よって，角速度には上限と下限がある。

角速度の上限を ω_1 とする。輪から受ける垂直抗力を N_1 とすると，最大摩擦力は μN_1 で，その方向は輪の接線方向で下向きであるから，輪の半径方向の力のつりあいから

'00　東北大学

$$mg\cos\theta+(mR\sin\theta\cdot\omega_1{}^2)\sin\theta-N_1=0$$

輪の接線方向の力のつりあいから

$$\mu N_1+mg\sin\theta-(mR\sin\theta\cdot\omega_1{}^2)\cos\theta=0$$

両式より N_1 を消去して

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g(\sin\theta+\mu\cos\theta)}{R\sin\theta(\cos\theta-\mu\sin\theta)}}$$

$$=\sqrt{\frac{g(\tan\theta+\mu)}{R\sin\theta(1-\mu\tan\theta)}}$$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ を代入して　$\omega_1=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}\,g(1+\mu)}{R(1-\mu)}}$

角速度の下限を ω_2 とする。垂直抗力を N_2 としたとき，最大摩擦力 μN_2 は輪の接線方向で上向きであるから，同様にして

$$mg\cos\theta+(mR\sin\theta\cdot\omega_2{}^2)\sin\theta-N_2=0$$

$$mg\sin\theta-\mu N_2-(mR\sin\theta\cdot\omega_2{}^2)\cos\theta=0$$

両式より N_2 を消去し，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ を代入して

$$\omega_2=\sqrt{\frac{g(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{R\sin\theta(\cos\theta+\mu\sin\theta)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{2}\,g(1-\mu)}{R(1+\mu)}}$$

よって，動き始めるときの角速度 ω は

$$\omega=\sqrt{\frac{\sqrt{2}\,g(1+\mu)}{R(1-\mu)}}$$

あるいは　$\omega=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}\,g(1-\mu)}{R(1+\mu)}}$

講評

　ちょっと変わった感じの問題に見えるが，遠心力さえ考慮すれば普通の力のつりあいの問題になる．円運動しているわけではないので，力のつりあいは水平方向と鉛直方向で考えてもそれほど面倒ではないが，単振動する場合は，接線方向でつりあいの式を立てるのが本式になるだろう．後半の小球が動き始める範囲の問題も，式が煩雑になるのを除けば，それほど解きにくい問題ではない．見た目よりも難しくはない問題．