’03　東京理科大学

解説

(a)　(ア)　質量 m にはたらく重力＝万有引力より

$$mg=G\frac{M\cdot m}{R^2}\qquad \text{よって}\quad g=\frac{GM}{R^2}\quad \cdots\cdots(1)$$

(イ)　高さ h の点は，地球の中心から $R+h$ だからその点の重力加速度の大きさを g' とすると

$$mg'=G\frac{M\cdot m}{(R+h)^2}$$

$GM=gR^2$ を用いて

$$g'=\frac{GM}{(R+h)^2}=g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2\quad \cdots\cdots(5)$$

(b)　(ウ)　向心力＝万有引力より　$m\dfrac{{v_0}^2}{R}=G\dfrac{M\cdot m}{R^2}$

$$\text{よって}\quad v_0=\sqrt{\frac{GM}{R}}\quad \cdots\cdots(8)$$

(エ)　運動エネルギーは　$\dfrac{1}{2}m{v_0}^2=\dfrac{GMm}{2R}$

位置エネルギーは　$-G\dfrac{Mm}{R}$

$$\text{よって}\quad E=\frac{GMm}{2R}-G\frac{Mm}{R}=-\frac{GMm}{2R}\quad \cdots\cdots(17)$$

(オ)　向心力＝万有引力より　$m\dfrac{v^2}{R+h}=G\dfrac{M\cdot m}{(R+h)^2}$

$$\text{よって}\quad v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}=\sqrt{\frac{GM}{R}\cdot\frac{R}{R+h}}$$

$$=v_0\sqrt{\frac{R}{R+h}}\quad \cdots\cdots(19)$$

(カ)　$T=\dfrac{2\pi r}{v}$ より

$$T=2\pi(R+h)\sqrt{\frac{R+h}{GM}}=2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}\quad \cdots\cdots(23)$$

'03　東京理科大学

(c)（キ） ケプラーの第二法則(面積速度一定の法則)より，A点とB点の面積速度が等しいから

$$\frac{1}{2}r_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}r_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}}$$

よって　$v_{\mathrm{B}}=\dfrac{r_{\mathrm{A}}}{r_{\mathrm{B}}}v_{\mathrm{A}}$　…… (25)

（ク） 半長軸 $a\left(=\dfrac{r_{\mathrm{A}}+r_{\mathrm{B}}}{2}\right)$ と周期 T は比例定数を k とすると，ケプラーの第三法則より

$a^3=kT^2$ であるから

$$T^2=\frac{1}{k}a^3=\frac{1}{k}\left(\frac{r_{\mathrm{A}}+r_{\mathrm{B}}}{2}\right)^3$$

よって　$T\propto(r_{\mathrm{A}}+r_{\mathrm{B}})^{\frac{3}{2}}$　…… (30)

（ケ）（キ）より　$v_{\mathrm{B}}=\dfrac{r_{\mathrm{A}}}{r_{\mathrm{B}}}v_{\mathrm{A}}=\dfrac{1}{b}v_{\mathrm{A}}$　…… (36)

（コ） $K_{\mathrm{A}}=\dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{A}}}^2$，$U_{\mathrm{A}}=-G\dfrac{Mm}{r_{\mathrm{A}}}$

$K_{\mathrm{B}}=\dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{B}}}^2$，$U_{\mathrm{B}}=-G\dfrac{Mm}{r_{\mathrm{B}}}$

だから　$K_{\mathrm{B}}=\dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{B}}}^2=\dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{A}}}^2\cdot\dfrac{{v_{\mathrm{B}}}^2}{{v_{\mathrm{A}}}^2}$

$$=K_{\mathrm{A}}\cdot\left(\frac{1}{b}\right)^2\quad\cdots\cdots (38)$$

（サ） また　$U_{\mathrm{B}}=-G\dfrac{Mm}{r_{\mathrm{B}}}=-G\dfrac{Mm}{r_{\mathrm{A}}}\cdot\dfrac{r_{\mathrm{A}}}{r_{\mathrm{B}}}$

$$=\frac{1}{b}\times U_{\mathrm{A}}\quad\cdots\cdots (36)$$

'03　東京理科大学

(シ)
$$\begin{cases} E_0 = K_A + U_A & \cdots\cdots \text{(i)} \\ E_0 = K_B + U_B = \left(\dfrac{1}{b}\right)^2 K_A + \dfrac{1}{b} U_A & \cdots\cdots \text{(ii)} \end{cases}$$

(i)−(ii)×b より　$E_0 - bE_0 = K_A - \dfrac{1}{b} K_A$

よって　$K_A = \dfrac{1-b}{1-\dfrac{1}{b}} E_0 = -b E_0$　$\cdots\cdots$ (33)

(ス)　(i)−(ii)×b^2 より　$E_0 - b^2 E_0 = U_A - bU_A$

よって　$U_A = \dfrac{1-b^2}{1-b} E_0 = (1+b) E_0$　$\cdots\cdots$ (40)

(セ)　(ii) の $E_0 = \left(\dfrac{1}{b}\right)^2 K_A + \dfrac{1}{b} U_A$ で

$b \to \infty$ とすれば　$E_0 \to 0$　$\cdots\cdots$ (44)

(ソ)　(i) の $E_0 = K_A + U_A$ で，$E_0 = 0$，$r_A = R$ とし，求める速さを v とすれば，

$$\frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{R} = 0$$

ゆえに　$v = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$　$\cdots\cdots$ (9)

講評

万有引力・ケプラーの法則の問題．この分野の内容のほぼ全てが含まれた良問．難易度としては標準的．簡単ではないが，きちんと押さえておくべき問題である．