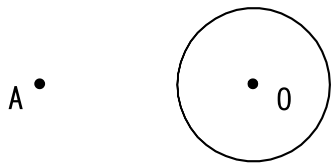
中学生向け数学　　　　　　　　　　　　　　　　　　　中学校　　　　　　　学年　氏名
（問題先頭の丸文字は問題を解ける学年を示し各学年で学ぶ項目は全てその学年に含ます。）
③：(問題が　$\boxed{\text{Ｇ：良い}}$、Ａ：基本、Ｄ：代表的、Ｓ：新規性、Ｈ：高水準、Ｆ：標準的)
★（４０点必須)、★★（６０点必須）★★★（７５点必須)
２４６ｇｇ０２０３０４ｈｉｂｉｙａｓａｋｕｚｕｓｊｈｉ　２００１年　難易度３

１）★★右の図の点Ａと円Ｏをもとにして、接線ＡＰ，と接線ＡＱを
定規とコンパスを使って作図せよ。ただし、Ｐ，Ｑは接点である。
また、作図に用いた線は消さないでおくこと。

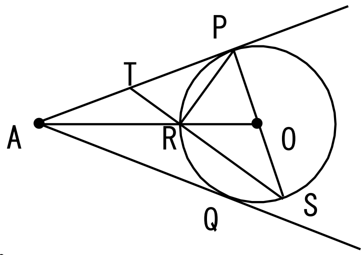
図1




２）図２は、図１において、次のように
作図した場合を表している。

- 点Ａと円の中心Ｏを結び、円Ｏとの交点をＲとする。
- 点Ｐと点Ｒを結ぶ。
- 点Ｐと点Ｏの中心Ｏを結ぶ線分を中心Ｏの方に延長し、円Ｏとの交点をＳとする。
- 点Ｓと点Ｒを結ぶ線分を点Ｒの方に延長し、接線ＡＰとの交点をＴとする。

図2




次の問に答えよ。

（１）★★△ＡＲＰ∽△ＡＴＲであることを証明せよ。
（２）★★★円Ｏの半径が１ｃｍ、ＡＯ＝３ｃｍであるとき、
△ＡＴＲの面積は何ｃｍ$^2$か。答に根号が含まれるときは
根号をつけたままで表せ。
また、答だけでなく、答を求める過程が分るように、
途中の計算も書け。

問題の解き方と復習のポイント

**キーワード＝接線＝円中心と接点を結＝９０°**

**長さ＝相似比、合同、三平方の定理**

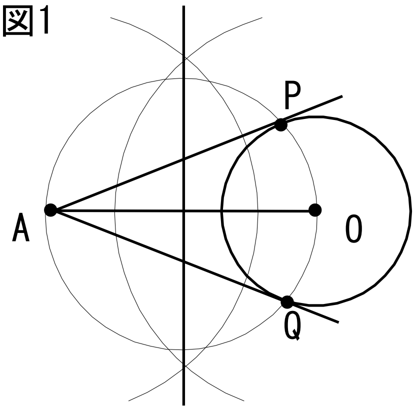
１）接線ＡＰはＯＰと直角に交わる。

接線ＡＱはＯＱと直角に交わる。

Ｐ，ＱはＯＡを直径とする円周上にある。

ＯＡの中点をかき円を描く。

図1




２）

（１）△ＡＰＲと△ＡＴＲにおいて、

右の図２で

●はすべて等しい

∠ＰＳＲ＝∠ＲＰＡ（接弦定理）

∠ＰＳＲ＝∠ＯＳＲ（同一）＝∠ＯＲＳ（円の半径）＝∠ＴＲＡ（対頂角）

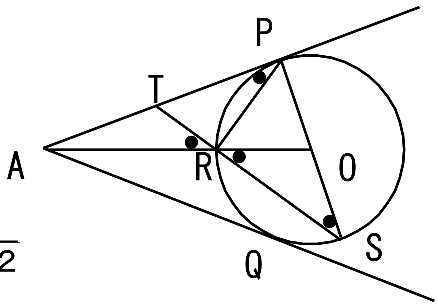
ゆえに∠ＲＰＡ＝∠ＴＲＡ・・・①

∠ＰＡＲ＝∠ＲＡＴ（共通）・・・・②

①、②より２組の角がそれぞれ等しいので

△ＡＰＲ∽△ＡＴＲである。

図2




（２）仮定よりＡＯ＝３、ＯＰ＝１

三平方の定理より、

ＡＰ＝$\sqrt{3^2-1}$ ＝$\sqrt{8}$＝$2\sqrt{2}$

△ＡＰＯの面積＝ＡＰ×ＰＯ×$\frac{1}{2}$＝$2\sqrt{2}\times1\times\frac{1}{2}$＝$\sqrt{2}$

ＡＲ＝２、ＲＯ＝１より、

△ＰＲＡ＝$\sqrt{2}\times\frac{2}{3}$＝$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

（１）の相似からＡＲ：ＡＰ＝ＡＴ：ＡＲ

２：$2\sqrt{2}$＝ＡＴ：２

ＡＴ＝$\frac{4}{2\sqrt{2}}$＝$\frac{4\sqrt{2}}{4}$＝$\sqrt{2}$

ＡＴ：ＴＰ＝１：１から

△ＡＴＲ＝$\frac{1}{2}$△ＰＲＡ＝$\frac{\sqrt{2}}{3}$（ｃｍ$^2$）