５「ガロア」

数学を勉強していると、ヨーロッパの「知」というものを感じる。ギリシャ時代のピタゴラス，ユークリッドに始まる流れがある。なぜ、紀元前の大昔にこのようなことを考えたのだろう。土地の分割など財産に関することに、その必要性があったと言われている。これは物事に公正さと、合理性を求める根本思想に繋がっているように思う。

数学の進歩が自然法則の発見に繋がり、微積分が生まれニュートン力学が確立された。１８，１９世紀になると特にドイツ，フランスに巨人が次々と現れる。イタリア，イギリスもなのだが、ドイツ，フランスには及ばない。日本はといえば、江戸時代に独自に発展した和算は、その時代の西洋のレベルに達していたものもあったという。

論理的思考に優れた才能を持つドイツ人に、数学は向いていたのだろうか？一方、フランスには天才的なひらめき、独自の発想で素晴らしい実績を残した人がいる。フーリエ級数の発見で電子工学などの発展に貢献した「フーリエ」、複素積分の「コーシー」など。

私にとっては影響力の大きさ、そしてドラマチックさの点で“ガロア”である。彼は弱冠２０歳、決闘で死んでしまうのだが、死の直前に残した遺言とも言える論文が後世に「群論」として確立され、現代数学に計り知れない影響を及ぼしている。

代数方程式特に５次方程式を、四則演算と冪根だけによって解こうとする代数的解法の追求により、代数学が進歩しガロアの群論を生む。

以降「体」「環」「ベクトル空間」「行列」という新しい概念が現代数学を作っていった。

例えば「体」の考え方。有理数体(Q：Quarcient/有理数･･･整数，分数の集合)の中に$x^2-2=0$という方程式の解は（無理数が存在しないため）ない。しかし、この有理数体に$\sqrt{2}$を加えてわずかに体を拡げた体〔拡大体といい Q($\sqrt{2}$)と表す。この中には$\sqrt{2}$や 1+$\sqrt{2}$などが含まれる〕の中に解 $x=\sqrt{2}$，$x=-\sqrt{2}$があり、それまで解けなかった方程式が解ける。拡大体 Q（$x=\sqrt[3]{2}$）にすると、$x^3-2=0$という３次方程式の解が存在することになる。

ガロア理論の根幹、少し難しいのだがこんな感じだ。

『係数が何かの体に属しているが、その体に属している解が見つからない方程式がある。その解を含むには、係数の体から広げてもっと大きい体にしなければならない。この方程式の解はどのような形をとるのか？それをガロアは２つの体、「係数の体」と「解の体」の関係に依存することを見抜いたのである。

ガロアは任意の与えられた方程式に対し、「解の体」の何らかの置換〔例えば、$\mathrm{a}+\sqrt{b}$が解とすると、＋と－を入れ替えて$\mathrm{a}-\sqrt{b}$などを考えること〕を考える必要があることを発見した。「解の体」のもつすべての置換の中に「係数の体」を変えない置換による部分集合がある。

方程式が解けるかどうかということは、この群の構造に関する問題に移し変えることによって明らかにでき、そのことを群論を使って証明した』。

「群」という数学的構造と「体」という数学的構造の間を行ったり来たりすることで、数学的素性を明らかするという画期的な方法論を完成した。

ガロアの群論は進化し、今では代数幾何学に繋がり多くの未解決難問解決に利用されている。

（２０１０．１１．１３）