

101 「球と円柱」

(I) 球に円柱を貫通させた時の共通部分の体積の問題

球と円柱の位置関係によって難易度は大きく変わる。

(1) 最も簡単なのは、球の中心を貫通する場合である。

この問題は重積分と極座標変換で解くことができる。

3次元座標を図1のとおりとし、球の半径を a 、円柱の半径を b とすると、球と円柱の方程式はそれぞれ次のように表される。

$$\text{球: } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

$$\text{円柱: } x^2 + y^2 = b^2 \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

求める共通部分の体積 V は、図1の で示した部分の4倍なので、重積分を使って次式で表される。

$$V = 4 \int_0^b \left[\int_0^b \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \right] dy$$

ここで、 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ とおき、 x 、 y 座標を極座標に変換すると、

$$\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2 - r^2} \text{ となり、}$$

積分範囲は $0 \leq r \leq b$ 、 $0 \leq \theta \leq \pi$ に変わる。

座標変換に伴う変換係数 (ヤコビアン) は、

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \text{ となる。以上から、}$$

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^b \left[\int_0^b \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \right] dy = 4 \int_0^\pi \left[\int_0^b \sqrt{a^2 - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta} \, r dr \right] d\theta \\ &= 4 \int_0^\pi \left[\int_0^b \sqrt{a^2 - r^2} \, r dr \right] d\theta = 4 \int_0^\pi \left[\left(-\frac{1}{3}\right) \left[(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^b \right] d\theta = -\frac{4}{3} \int_0^\pi \left[(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right] d\theta \\ &= -\frac{4}{3} \left[(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right] \int_0^\pi d\theta = -\frac{4}{3} \left[(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right] \pi = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3} \left[a^3 - (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} \right]}} \quad \dots\dots\dots \text{③} \end{aligned}$$

これが求める共通部分の体積である。

この式で、円柱の半径 b が球の半径に a に等しい場合は、球はすっぽり円柱に含まれることになるので、共通部分は球の体積と同じになるはずである。③に $b = a$ を入れると、

$$V = \frac{4\pi}{3} \left[a^3 - (a^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{4}{3} \pi a^3 \text{ となり球の体積と一致する。}$$

球の中心を貫通するこのケース場合、求める体積は図2に示すように、

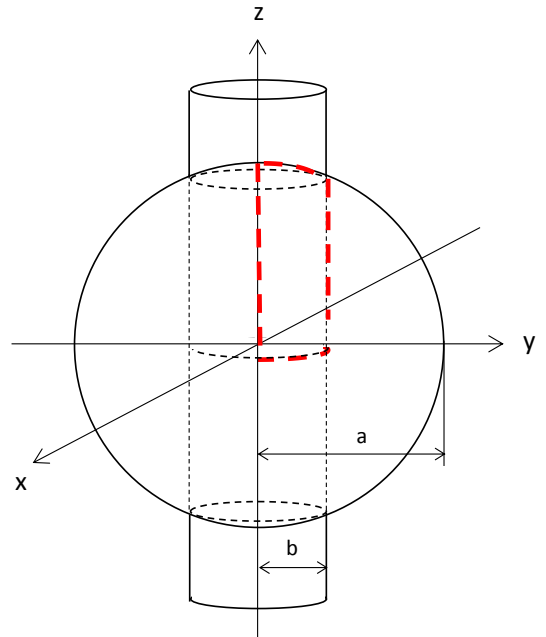


図1

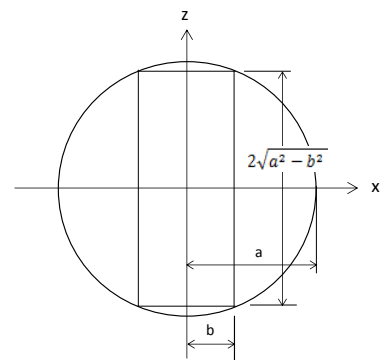


図2

高さ $2\sqrt{a^2 - b^2}$ の円柱と底面が半径 b の“おわん”のふたのような形状の合計である。

円柱の体積 V_1 は、 $V_1 = 2\pi b^2 \sqrt{a^2 - b^2}$ 、

“おわん”のふた状の体積を V_2 とすると、底面の半径 r 、高さ h の同形状は、欠球体積の公式として

$\frac{\pi h}{6}(h^2 + 3r^2)$ で与えられる。これを用いて $h = a - \sqrt{a^2 - b^2}$ 、 $r = b$ を入れて計算すると、

$$V_2 = \frac{\pi(a - \sqrt{a^2 - b^2})}{6} \left((a - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + 3b^2 \right) = \frac{\pi}{3} \left[2a^3 - (2a^2 + b^2)\sqrt{a^2 - b^2} \right] \text{ となる。}$$

よって求める体積は、 $V_1 + 2V_2 = 2\pi b^2 \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{2\pi}{3} \left[2a^3 - (2a^2 + b^2)\sqrt{a^2 - b^2} \right]$

$$= \frac{2\pi}{3} \left[3b^2 \sqrt{a^2 - b^2} + 2a^3 - (2a^2 + b^2)\sqrt{a^2 - b^2} \right] = \frac{2\pi}{3} \left[2a^3 - 2(a^2 - b^2)\sqrt{a^2 - b^2} \right]$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left[a^3 - (a^2 - b^2)\sqrt{a^2 - b^2} \right] \text{ となり、③式に一致することが確認された。}$$

(2) 次によくあるのは、図3に示すように半径 a の球に、半径 $\frac{a}{2}$ の円柱を内接させたものである。

式で表すと次のとおりとなる

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \dots\dots\dots \text{④}$$

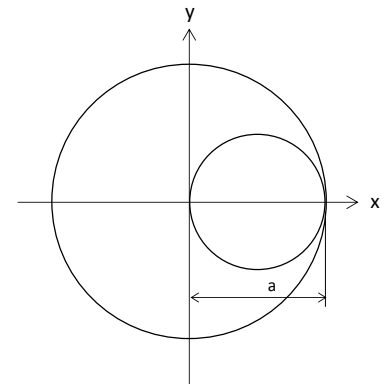


図3

共通部分は図4に示すように複雑な図形となる。

① ④の交線が作る曲線を Viviani 曲線という。

(1) と同様に、 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ とおくと、

$$\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2} \text{ であり、ヤコビアンは } r \text{ である。}$$

④に $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ を入れて、

$$\left(r \cos \theta - \frac{a}{2}\right)^2 + (r \sin \theta)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ より、} r = a \cos \theta \text{ となり、}$$

積分範囲は $0 \leq r \leq a \cos \theta$ 、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に変わる。以上より、

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2 - r^2} r dr \right] d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(-\frac{1}{3}\right) \left[(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{a \cos \theta} \right] d\theta$$

$$= -\frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(a^2 - (a \cos \theta)^2)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right] d\theta = -\frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(a^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right] d\theta$$

$$\frac{4a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{4a^3}{3} \left[\theta - \frac{1}{12} (\cos 3\theta - 9 \cos \theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a^3}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$$

これが求める共通部分の体積である。[$\sin^3 \theta = \frac{1}{4}(3 \sin \theta - \sin 3\theta)$ を用いた]

この問題は、球に内接する円柱の半径が球の $\frac{1}{2}$ ということから比較的簡単に解くことができる。

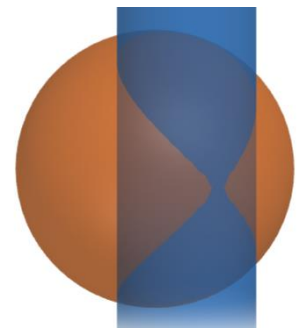


図4

$\int \sqrt{a^2 - r^2} r dr$ の不定積分が $-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}$ となり、 $\frac{3}{2}$ 乗が出て来ることで、積分範囲によっては難し

くなるが、この場合は $a^3 - (a^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = a^3(1 - \sin^3 \theta)$ のように $\frac{3}{2}$ 乗が取れることで比較的簡単な式となる。

(3) 最も難しいのは、任意の半径の円柱を任意の位置で球を貫通させる場合である。(図5)

式で表せば次のようになる。

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \dots\dots\dots ①$$

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = b^2 \quad \dots\dots\dots ⑤$$

図6で分かるように、断面は球を曲面で斜めに切断したような複雑な形をしている。全く対称性がないように見えるが、図5の点線のように、球と円柱の中心を通る面で切断すると、その面に対して対称になる。その面をX軸に一致させると、その変換は座標軸の回転であり共通部分の体積に変化はなく図7のようになる。

円柱の中心はX軸上に移り、その座標は $(\sqrt{p^2 + q^2}, 0)$ となる。
 $\sqrt{p^2 + q^2} = m$ として⑤を書きかえると⑥式となる。

$$(x-m)^2 + y^2 = b^2 \quad \dots\dots\dots ⑥$$

ただし、 $a - b \geq m$ である。

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおき⑥に入れると、

$$(r \cos \theta - m)^2 + (r \sin \theta)^2 = b^2 \text{ から、}$$

$$r^2 - 2m \cos \theta r + (m^2 - b^2) = 0$$

これを r について解くと、 $r = m \cos \theta \pm \sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \theta}$ となる。

これは(2)の $r = a \cos \theta$ に対し、 $\sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \theta}$ の項が含まれており積分範囲は、 $0 \leq r \leq m \cos \theta + \sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \theta}$ となるので、

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^\pi \left[\int_0^{m \cos \theta + \sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \theta}} \sqrt{a^2 - r^2} r dr \right] d\theta \\ &= 4 \int_0^\pi \left[\left(-\frac{1}{3}\right) \left[(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{m \cos \theta + \sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \theta}} \right] d\theta \\ &= -\frac{4}{3} \int_0^\pi \left[\left(a^2 - \left(m \cos \theta + \sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \theta} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right] d\theta \quad \dots\dots\dots ⑦ \end{aligned}$$

となり、これ以上は積分できない。

極座標への変換を行わないで計算を進めると、

① を変形して、 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$,

⑥を x について解くと、 $x = m \pm \sqrt{b^2 - y^2}$ より、積分範囲は $m - \sqrt{b^2 - y^2} \leq x \leq m + \sqrt{b^2 - y^2}$ となる。

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ を図8-1に示すように、 $m - \sqrt{b^2 - y^2} \leq x \leq m + \sqrt{b^2 - y^2}$ の範囲について x で積分すると y の関数になるので、さらに図8-2で示す $-b \leq y \leq b$ の範囲について y で積分することによって求める体積となる。

以上を式で示すと、

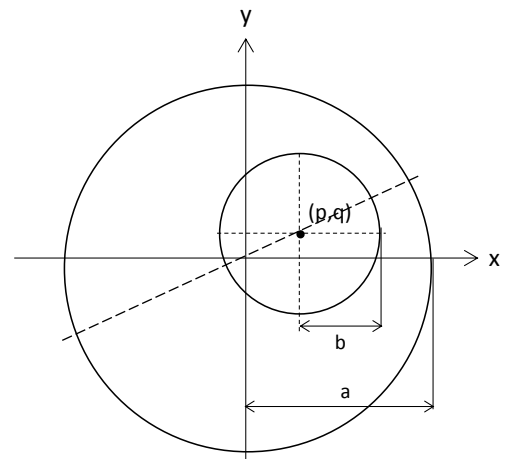


図5

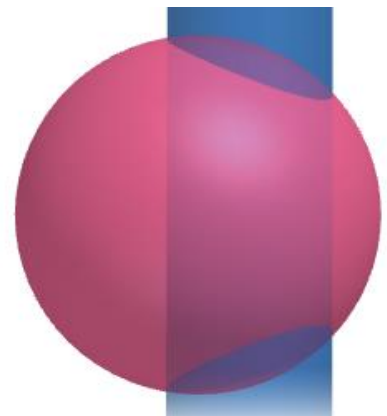


図6

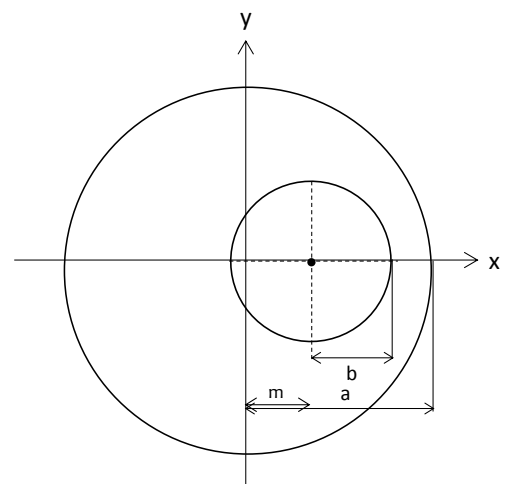


図7

$$V = 2 \int_{-b}^b \left[\int_{m-\sqrt{b^2-y^2}}^{m+\sqrt{b^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dx \right] dy \text{ となる。対称性を考慮して、}$$

$$V = 4 \int_0^b \left[\int_{m-\sqrt{b^2-y^2}}^{m+\sqrt{b^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dx \right] dy \dots\dots\dots \text{⑧}$$

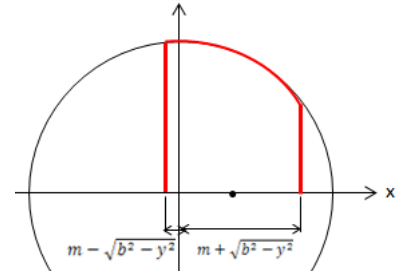


図 8 - 1

[]内の不定積分は、 $\int \sqrt{a^2-x^2-y^2} dx$

$$= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2-x^2-y^2} + (a^2-y^2) \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \right]$$

なので、⑧は次のようになる。

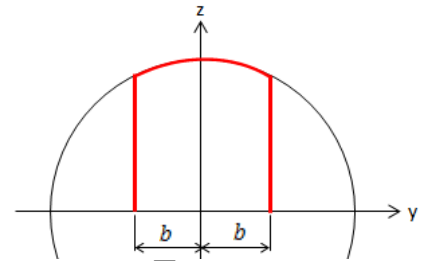


図 8 - 2

$$V = 4 \int_0^b \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2-x^2-y^2} + (a^2-y^2) \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \right]_{m-\sqrt{b^2-y^2}}^{m+\sqrt{b^2-y^2}} dy$$

$$= 2 \int_0^b \left\{ \left(m + \sqrt{b^2-y^2} \right) \sqrt{(a^2-b^2-m^2) - 2m\sqrt{b^2-y^2}} + (a^2-y^2) \tan^{-1} \frac{m + \sqrt{b^2-y^2}}{\sqrt{(a^2-b^2-m^2) - 2m\sqrt{b^2-y^2}}} \right. \\ \left. - \left(m - \sqrt{b^2-y^2} \right) \sqrt{(a^2-b^2-m^2) + 2m\sqrt{b^2-y^2}} + (a^2-y^2) \tan^{-1} \frac{m - \sqrt{b^2-y^2}}{\sqrt{(a^2-b^2-m^2) + 2m\sqrt{b^2-y^2}}} \right\} dy \dots\dots \text{⑨}$$

⑨式において、被積分関数は係数を除外すると次の3種類である。

(A) $\int (m + \sqrt{b^2-y^2}) \sqrt{(a^2-b^2-m^2) - 2m\sqrt{b^2-y^2}} dy$

(B) $\int \tan^{-1} \frac{m + \sqrt{b^2-y^2}}{\sqrt{(a^2-b^2-m^2) - 2m\sqrt{b^2-y^2}}} dy$

(C) $\int y^2 \tan^{-1} \frac{m + \sqrt{b^2-y^2}}{\sqrt{(a^2-b^2-m^2) - 2m\sqrt{b^2-y^2}}} dy$

(A)～(C)の積分はいずれも不可能で、これ以上計算を進めることは難しい。

ここからは、数値計算で近似解を求めてみる。

⑨式において、変数 y を $0 \sim b$ の範囲で 0.001 間隔で変化させて、それぞれの計算値に 0.001 乗じたものを合計することで近似値が求められる。

[1]球の中心を貫通する場合(球の半径 $a=1$, 円柱の半径 $b=0.4, 0.5, 0.6$, 中心は球に一致 $m=0$)で計算すると、(1)と対比でき、結果は右表のとおりである。

a	b	m	$\frac{4\pi}{3} [a^3 - (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}]$	⑨式による計算値
1	0.4	0	0.9640	0.9654
1	0.5	0	1.4681	1.4661
1	0.6	0	2.0441	2.0463

共通部分の体積が球のちょうど半分になるとき、円柱の半径はどのようになるのだろうか？
円柱の半径を x とすると、

$$\left(\frac{1}{2}\right) \frac{4\pi}{3} a^3 = \left[a^3 - (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right] \quad \text{これを解いて、} \quad x = \sqrt{1 - 2^{-\frac{2}{3}} a}$$

$a = 1$ の時、 $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}} = 0.6083$ となることが分かる。

〔2〕半径 a の球に、半径 $\frac{a}{2}$ の円柱が内接する場合（球の半径 $a=1$ ，円柱の半径 $b=0.5$ ， $m=0.5$ ）

$$\frac{4a^3}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) \text{に } a = 1 \text{ を入れて計算すると、} \quad \frac{4 \cdot 1^3}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) = 1.2055$$

a	b	m	$\frac{4a^3}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$	⑨式による計算値
1	0.5	0.5	1.2055	1.2039

〔1〕，〔2〕いずれの場合も小数点以下2桁まで一致していることが確認できる。

〔3〕任意の半径の円柱を任意の位置で球を貫通させる場合

例えば、右図に示すような場合について計算してみる。図9-1は、球の1/3の半径を持つ円柱を中心から半径の1/2の位置で貫通した場合、図9-2は、さらにその半分の半径の円柱を同じ位置で貫通した場合である。

計算は、球の半径 $a=1$ として行う。
結果は下表に示すとおりである。

a	b	m	⑨式による計算値
1	1/3	0.5	0.5782
1	1/6	0.5	0.1500

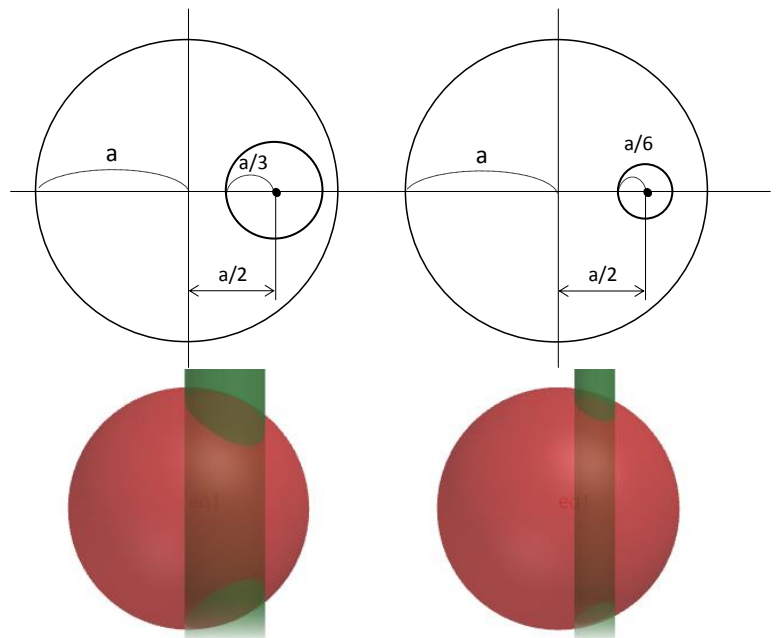


図9-1

図9-2

次に、図10のように、球の1/2の半径の円柱を球の右端に内接する位置から、徐々に左に移動させたとき

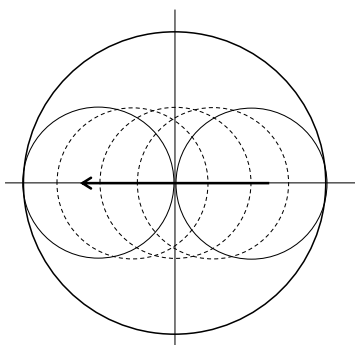


図10

きの共通部分の体積の変化を調べてみる。

このことにあまり意味があるとは思われないが、⑨式において $m=0.5$ から 0.049 ， $0.048\dots$ ，と 0.01 ずつ変化させた時の共通部分の体積の変化はどうなるだろうか？ 計算結果は表1に示すとおりとなった。

当然、共通部分の体積Vは円柱が球の中心にあるときが最大となる。m=0 からさらに m=-0.5 と変化させると対称形となり、それをグラフにすると図 1 1 のようになる。

この曲線は、円柱が徐々に球の中心に向かって移動するにつれて、体積が 2 次関数的に変化する状態を示している。

エクセルでこの曲線の「2 次の多項式近似式」を求めると $V = -0.9987m^2$ が得られ、ほぼ $V = -m^2$ と考えて良いことがわかる。

以上より、共通部分の体積は球の中心からの距離の 2 乗で変化することが確認された。体積の変化がディメンション通りに長さの 3 乗とならないのは何故だろう？

m	V	m	V	m	V
0.50	1.2039	0.33	1.3624	0.16	1.4427
0.49	1.2167	0.32	1.3689	0.15	1.4456
0.48	1.2288	0.31	1.3752	0.14	1.4482
0.47	1.2404	0.30	1.3812	0.13	1.4507
0.46	1.2514	0.29	1.3870	0.12	1.4530
0.45	1.2620	0.28	1.3926	0.11	1.4551
0.44	1.2722	0.27	1.3979	0.10	1.4570
0.43	1.2820	0.26	1.4030	0.09	1.4588
0.42	1.2914	0.25	1.4079	0.08	1.4603
0.41	1.3001	0.24	1.4126	0.07	1.4617
0.40	1.3093	0.23	1.4171	0.06	1.4629
0.39	1.3177	0.22	1.4214	0.05	1.4639
0.38	1.3259	0.21	1.4254	0.04	1.4647
0.37	1.3337	0.20	1.4293	0.03	1.4653
0.36	1.3413	0.19	1.4329	0.02	1.4658
0.35	1.3459	0.18	1.4364	0.01	1.4660
0.34	1.3556	0.17	1.4396	0	1.4661

表 1

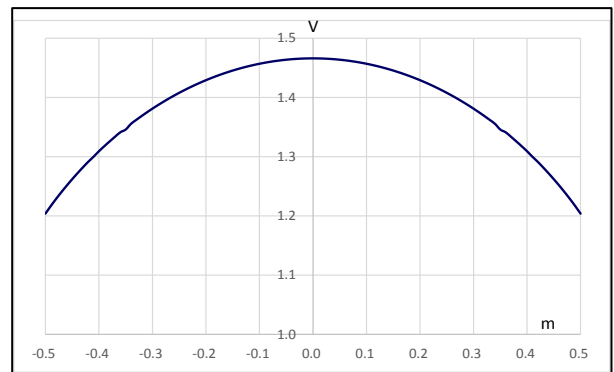


図 1 1

(II) 球に円柱を貫通させた時の共通部分の表面積の問題

次に、球に円柱を貫通させた時のくり抜いた部分の表面積を求める問題を考えてみる。

“くり抜いた部分”としたのは“接する部分”だと、貫通する位置によっては円柱の表面積になってしまうためである。

(4) 球の中心を貫通する場合

図 1 2 に示すように、求める面積は $S = S_1 + S_2 \times 2$ である。

S_1 は円柱の側面積なので、 $S_1 = 2\pi b \cdot 2\sqrt{a^2 - b^2} = 4\pi b\sqrt{a^2 - b^2}$

S_2 を求めるには曲面積の公式

曲面 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ (平面内の領域) とすると、

$$S = \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

を用いる。

$z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ だから、

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2}$$

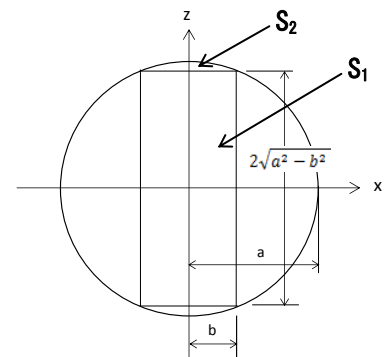


図 1 2

$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ となる。 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおき、極座標に変換すると、領域Dは

$0 \leq r \leq b$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 、ヤコビアンは r なので S_2 は次の式で与えられる。

$$S_2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^b \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr \right] d\theta \quad \text{不定積分} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr = -\sqrt{a^2 - r^2} \text{ であるから、}$$

$$S_2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^b \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr \right] d\theta = -4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^b d\theta = -4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{a^2 - b^2} - a) d\theta$$

$$4a(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 4a(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2})$$

よって、 $2S_2 = 4\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2})$ となる。

$$\text{以上より求める面積 } S = S_1 + 2S_2 = 4\pi b\sqrt{a^2 - b^2} + 4\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2}) = \underline{\underline{4\pi [a^2 - (a - b)\sqrt{a^2 - b^2}]}}$$

(5) 半径 a の球に、半径 $\frac{a}{2}$ の円柱を内接させた場合(図3, 4参照)

求める面積 S は図13において、 $(S_1 + S_2) \times 2$ である。

まず S_1 について、

同様に、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと、

$$\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2} \text{ となり、ヤコビアンは } r \text{ である。}$$

④に $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を入れて、

$$\left(r \cos \theta - \frac{a}{2} \right)^2 + (r \sin \theta)^2 = \left(\frac{a}{2} \right)^2 \text{ より、} r = a \cos \theta \text{ だから、}$$

積分範囲は $0 \leq r \leq a \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に変わる。以上より、

$$V = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{a \cos \theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr \right] d\theta = -2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^{a \cos \theta} d\theta$$

$$= -2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{a^2 - (a \cos \theta)^2} - a) d\theta = -2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta - 1) d\theta = -2a^2 [-\cos \theta - \theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -2a^2 [-\cos \theta - \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{(\pi - 2)a^2}}$$

次に S_2 について、

S_2 の部分を引き延ばし展開すると、図14のような曲線になっている。この曲線はどのようなものだろうか？

図15をもとに、この曲線を導いてみる。

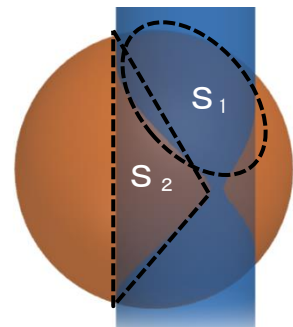


図13

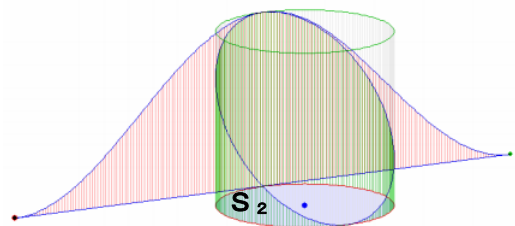


図14

球の中心をO、円柱の中心をP、円柱上の1点をQとする。
 点Oを固定して円柱を点Sの位置から開きY軸に重ねると、
 点線で示すようにSはTに、QはRの位置に移る。

$\angle OPQ = \theta$ とするとき、円弧OQの長さは $= \frac{a\theta}{2}$ だから

ORの長さは $\frac{a\theta}{2}$ である。Qの位置における球と円柱の交点

(Z座標)を求めれば、原点からの位置(Y座標)と高さ(Z座標)とが関係付けられる。

① 式 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, ④式 $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$

から、yを消去しxとzの関係を導くと、

$z = \sqrt{a^2 - ax}$ を得る。点QのX座標 $\frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos \theta$

$= \frac{a}{2} (1 - \cos \theta)$ を $z = \sqrt{a^2 - ax}$ に入れると、

$$z = \sqrt{a^2 - a \cdot \frac{a}{2} (1 - \cos \theta)} = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos \theta} = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1} = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2} = a \cos \frac{\theta}{2}$$

以上よりY座標が $\frac{a\theta}{2}$ のとき、Z座標は $a \cos \frac{\theta}{2}$ となることが導かれた。これから θ を消去すれば

yとzの関係が得られる。

$y = \frac{a\theta}{2}$ より $\theta = \frac{2y}{a}$, これを $z = a \cos \frac{\theta}{2}$ に入れて、 $z = a \cos \frac{y}{a}$ ⑩

よって、図14の曲線はコサインカーブであることがわかった。

⑩は、 $y = \frac{a}{2}\pi$ のとき $z = 0$, $y = 0$ のとき $z = a$ となり、図15の曲線と一致する。

S_2 の面積は、⑩を0から $\frac{a}{2}\pi$ まで積分して2倍すればいいから、

$$S_2 = 2 \int_0^{\frac{a}{2}\pi} a \cos \frac{y}{a} dy = 2a^2 \left[\sin \frac{y}{a} \right]_0^{\frac{a}{2}\pi} = 2a^2$$

以上より求める面積Sは、 $S = 2(S_1 + S_2) = 2[(\pi - 2)a^2 + 2a^2] = \underline{\underline{2\pi a^2}}$

何と！球の表面積の半分に等しい面積となった。

これは図15において、点Oを固定して円柱を点Sの位置から開きY軸に重ねたことでこのような計算になったが、逆にSを固定してOの位置から開き、球面に一致させれば、円柱の半径が球の半分であるから球の半分の面積を覆うことになるのは当然である。もっと早くこのことに気付いていればこの計算は不要だった。しかしこの計算によって、Viviani 曲線を平面にするとコサインカーブであることが分かったのである。

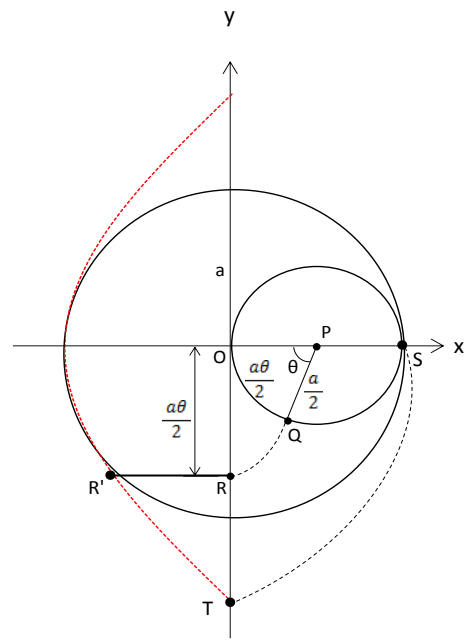


図 1 5

(6) 任意の半径の円柱を任意の位置で球を貫通させる場合 (図6, 7 参照)

前問と同様 S_1, S_2 に分けてそれぞれ求める。

まず S_1 について、式は①⑥である。

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$(x - m)^2 + y^2 = b^2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

(3) と同様に、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおき⑥に入れると、

$r = m \cos \theta \pm \sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \theta}$ から、積分範囲は、 $0 \leq r \leq m \cos \theta + \sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \theta}$ となるので、

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{m \cos \theta + \sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \theta}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr \right] d\theta = -2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^{m \cos \theta + \sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= -2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{a^2 - (m \cos \theta + \sqrt{b^2 - m^2 \sin^2 \theta})^2} - a \right] d\theta \end{aligned}$$

が導かれるが、これ以上は積分できない。

極座標への変換を行わないで計算を行うと (図8-1, 8-2 参照)

$$S_1 = 2 \int_{-b}^b \left[\int_{m - \sqrt{b^2 - y^2}}^{m + \sqrt{b^2 - y^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx \right] dy \quad \dots\dots\dots \textcircled{12}$$

となる。対称性を考慮して、 $S_1 = 4 \int_0^b \left[\int_{m - \sqrt{b^2 - y^2}}^{m + \sqrt{b^2 - y^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx \right] dy$

[]内の不定積分は $\int \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ なので⑫は次のようになる。

$$\begin{aligned} S_1 &= 4a \int_0^b \left[\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right]_{m - \sqrt{b^2 - y^2}}^{m + \sqrt{b^2 - y^2}} dy \\ &= 4a \int_0^b \left[\tan^{-1} \frac{m + \sqrt{b^2 - y^2}}{\sqrt{(a^2 - b^2 - m^2) - 2m\sqrt{b^2 - y^2}}} - \tan^{-1} \frac{m - \sqrt{b^2 - y^2}}{\sqrt{(a^2 - b^2 - m^2) + 2m\sqrt{b^2 - y^2}}} \right] dy \end{aligned}$$

が導かれるが、これ以上は積分できない。

S_2 については前問 (5) の考え方で計算できるが、 S_1 が求められないのでこれ以上は意味がない。

やはり (3) と同様、任意の位置、任意の径の場合、つまり一般解を求めることは難しいことが分かった。共通部分の体積及び表面積を求める問題は、積分不可能な関数が出て来るため、一般解は得られない結果となった。(2021. 03. 08)