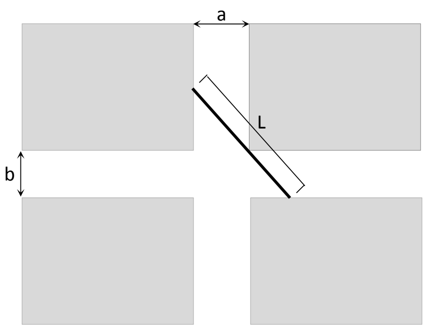
## １０３「交差点を通過できる電柱の長さ」

再びネット上で見つけた難問に挑戦

**交差点を通過できる最大の電柱の長さ**

道幅がそれぞれ a，b の交差点があるとしよう。両サイドは家がみっしり建っている。つまり、道幅しか空間が空いていないとせよ。その交差点を電柱が通過する（簡単のために電柱に長さはあっても幅がないとする)。その電柱の最大値を求めよ。




しばらくこの問題を解く突破口が見つからなかったが、図１の点線で示すように壁を考えれば、８０「**数学 超・超絶難問（４）**」と同じ『壁に立てた棒の包絡線』と同じ問題だということに気付いた。

図１点線の示す位置に $x-y$ 座標を設定し、電柱の長さをＬとすると、

軌跡は $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=L^{\frac{2}{3}}$ …………… ①　　という式で表される。

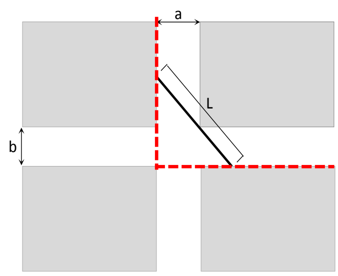



図１

この曲線は図２に示すように、星芒形（アステロイド）と呼ばれている。

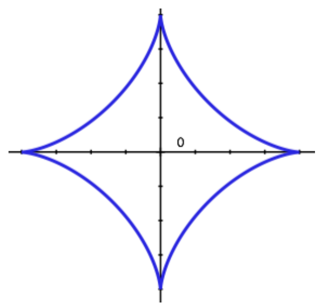



図２

電柱の長さが最大になるのは、電柱が $x=a$，$y=b$ を通過するときだから、

① に $x=a$，$y=b$ を代入して、　$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=L^{\frac{2}{3}}$　より

$$\underline{\underline{L=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}} \quad \text{または、} \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

とても整った美しい式で表される。これがＬの最大値である。

前に解いた問題の結果を利用して簡単に解けてしまった。

図３に示すように、建物と電柱とのなす角度を $\theta$ とすると、電柱の長さは

$\theta$ を用いて、$L=\dfrac{a}{\cos\theta}+\dfrac{b}{\sin\theta}$ ………… ③　　　と表される。

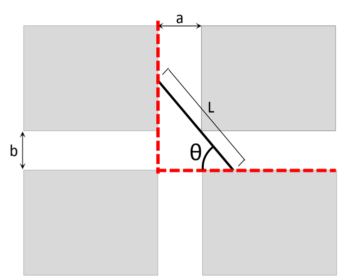
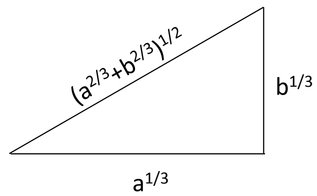



図３

これを $\theta$ で微分して 0 と置くと、$\dfrac{dL}{d\theta}=\dfrac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}-\dfrac{b\cos\theta}{\sin^2\theta}=0$

$a\sin^3\theta=b\cos^3\theta$ 、 $\tan^3\theta=\dfrac{b}{a}$ から $\tan\theta=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ ………… ④

④を満たす $\theta$ が、求める電柱の長さを与える壁との角度である。




右図で、$tan\,\theta=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ より $sin\,\theta=\dfrac{b^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$，$cos\,\theta=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$

これを $L=\dfrac{a}{cos\,\theta}+\dfrac{b}{sin\,\theta}$ に入れて、$L=\ a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\underline{\underline{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}}$

②と同じ結果が求められる。

図３において、同様に $x-y$ 座標を考え曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=L^{\frac{2}{3}}$ の点 $(a,\ b)$ での接線の勾配を求めてみると

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=L^{\frac{2}{3}}$ を微分して、$\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}dy=0$，$\dfrac{dy}{dx}=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ これに $x=a$，$y=b$ を入れて、

$\dfrac{dy}{dx}=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}=-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ これは④の $tan\,\theta$ に一致している。

（④は $\theta$ の取り方が逆のため符号が異なっている）

以上より、点 $(a,\ b)$ における曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=L^{\frac{2}{3}}$ の接線は電柱に一致し、その時電柱の長さが最小となっている。④式の $\theta$ は最大値ではなく最小値を与えるものであり、それは次に出て来る⑤式の t も同様である。このことは、電柱が点 $(a,\ b)$ を通過する時、最も短くないと通過できないことを示している。つまり、交差点を通過できる電柱の長さは、点 $(a,\ b)$ を通過するときの長さで決まるのである。

「交差点を通過できる最大の電柱の長さ」ということから、最大値を求める問題と捉えてしまうが、電柱の長さは、角を通過する時が最も短くなることに気付けば、この問題は「交差点の角におけるアステロイド曲線の接線の第一象限の長さを求める問題」ということになる。

ネット投稿者の解答は次の通り。

図４のように、建物の角から電柱端部までの長さを t として、電柱の長さを t の関数 $f(t)$ で表しその最大値を求める、という方法で求めている。

もう一方の建物の角から電柱端部までの長さを $x$ とすると、

$f(t)=\sqrt{t^2+b^2}+\sqrt{a^2+x^2}\ =\ \sqrt{(a+t)^2+(x+b)^2}$ ……………⑤

と表せるから、これを整理して　$(tx)^2-2abtx+(ab)^2=0$,

$(tx-ab)^2=0$ より、

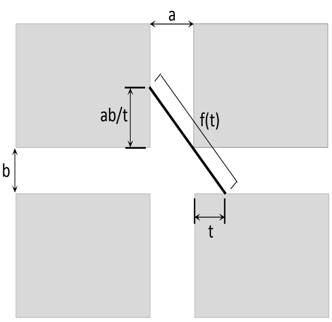



図４

$x=\dfrac{ab}{t}$ となる。これを⑤に入れて、$f(t)=\sqrt{t^2+b^2}+\sqrt{a^2+\left(\dfrac{ab}{t}\right)^2}$ ……………⑥

⑥を微分して 0 と置くと、

$$f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+b^2}}-\frac{a^2b^2}{t^3\sqrt{a^2+\left(\frac{ab}{t}\right)^2}}=\frac{t}{\sqrt{t^2+b^2}}-\frac{ab^2}{t^2\sqrt{t^2+b^2}}=\frac{t^3-ab^2}{t^2\sqrt{t^2+b^2}}=0$$

以上から、$t^3 = ab^2$ となる。従って、$\underline{\underline{t = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}}}$ のときに最大となる。この $t$ を⑥に入れて、

$$\sqrt{\left(a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}\right)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + \left[\frac{ab}{\left(a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}\right)}\right]^2} = \sqrt{b^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2 b^2}{\left(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}}\right)}}$$

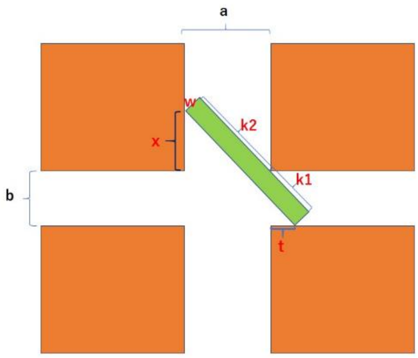
$$\sqrt{b^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)} + \sqrt{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

②式と同じ結果が得られた。

この問題にはさらに続きがある。

**交差点を通過できる最大の電柱の長さ　拡張版**

電柱に幅をもたせるのですが、それが一挙に解析解の不可能なことになるのを観察します。電柱の幅を「w」とします。図のように電柱の長さを $k_1$, $k_2$ に分けます。角に接する点で分けています。右下の接点の距離 t を変数にします。




するとピタゴラスの定理から３本の方程式を立てることができます。

$$k1^2 + w^2 == b^2 + t^2$$
$$k2^2 + w^2 == a^2 + x^2$$
$$(x + b)^2 + (a + t)^2 == (k1 + k2)^2$$

未知数は x, $k_1$, $k_2$ です。

この解のひとつでいずれも正となるものを取ります。もう既に x が複雑な式になります。

$$x \to \left(a^2 b t^2 + b w^4 + t w \sqrt{(b^2 + t^2 - w^2)(a t + w^2)^2} + a w \left(2 b t w + \sqrt{(b^2 + t^2 - w^2)(a t + w^2)^2}\right)\right) \Big/ \left((t^2 - w^2)(a t + w^2)\right)$$

$$k1 \to \frac{\sqrt{(b^2 + t^2 - w^2)(a t + w^2)^2}}{a t + w^2}$$

$$k2 \to \frac{a b w + b t w + \sqrt{(b^2 + t^2 - w^2)(a t + w^2)^2}}{t^2 - w^2}$$

電柱の長さ＝$k_1$+$k_2$ を g(t)という関数にしましょう。多少変形をしておくとこんな式になりまね。

$$g(t) = \sqrt{(b^2 + t^2 - w^2)} + \frac{a b w + b t w + (a t + w^2)\sqrt{(b^2 + t^2 - w^2)}}{t^2 - w^2}$$

これを t で微分してゼロとしたものから、 t についての方程式が出ます。

$$\frac{t (t^2 - w^2)^2}{\sqrt{b^2 + t^2 - w^2}} = 2 t \left(a b w + b t w + \sqrt{b^2 + t^2 - w^2}\,(a t + w^2)\right) + \left(b w + \frac{t w^2 + a (b^2 + 2 t^2 - w^2)}{\sqrt{b^2 + t^2 - w^2}}\right)(t^2 - w^2)$$

これは t の八次方程式ですので、一般解は出せません。なので打ち止めとなります。数値計算はお面白みにかけますのでねえ。しかしながら、もう少し簡単にする可能性はありそうです。 w＝ t もしくはw＝− t の時にこの式がゼロになるからです。では、どうやればいいでしょうか？

電柱の長さ $g(t)$ の式において、例えば $a=3.0(m)$，$b=2.0(m)$，$w=1.0(m)$ でグラフにすると図５のようになる。$t=1.0(m)$ で不連続になっているのは、

$$g(t)=\sqrt{(b^2+t^2-w^2)}+\frac{abw+btw+(at+w^2)\sqrt{(b^2+t^2-w^2)}}{t^2-w^2}$$

において、$t=w$ のとき分母がゼロになり、$g(t)$ が $\infty$ になるためである。

勿論、$t>0$ であるが、$t<w$ で $g(t)$ がマイナスになるため、定義域は $t \geqq w$ でなければならない。

図５から分かるように、$g(t)$ は最大・最小値を持たない。以上より、ピタゴラスの定理から導いた３つの方程式

$$k_1^2+w^2=b^2+t^2$$

$$k_2^2+w^2=a^2+x^2$$

$$(x+b)^2+(a+t)^2=(k_1+k_2)^2$$

からは解を得ることはできないと思われる。

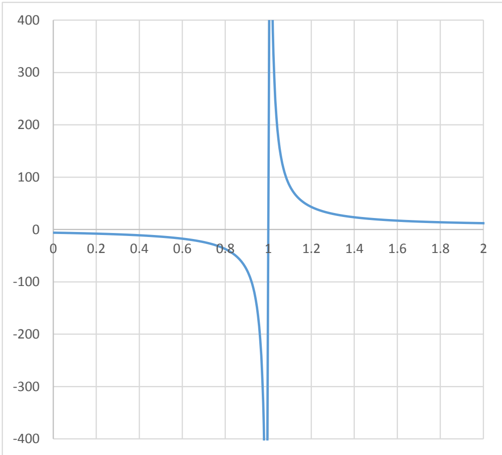


図５

以下、私の考えた筋道を書いていく。

問題の図を眺めていたが、なかなか解くための手掛かりが見つからなかった。しばらく考えてやっと気付いたのは、電柱に幅があるということは、電柱の長さが長くなったのと同等と考えて良いのではないかということだ。

それを図にしたのが図６である。電柱に幅があることによって、もとの長さＬの電柱がＡＢまで伸びて、見かけ上Ｌ＋Ｌ₁＋Ｌ₂になったと同等と考える。

図６のように、建物と電柱のなす角度を $\theta$ として、

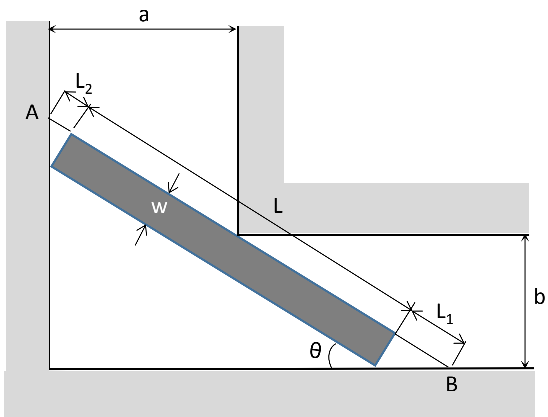


図６

③式、$L=\dfrac{a}{\cos\theta}+\dfrac{b}{\sin\theta}$ を利用する。

見かけ上の電柱の長さをＬ’とすると、$L'=\mathrm{L}+L_1+L_2$ と表せる。

$L_1=\dfrac{w}{\tan\theta}$，$L_2=w\ \tan\theta$ だから、$L'=L+\dfrac{w}{\tan\theta}+w\ \tan\theta=L+w\left(\dfrac{1}{\tan\theta}+\tan\theta\right)$

前の計算結果から、この交差点を通過できる電柱の長さは $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ でなければならないから

これがＬ′に等しとして、$\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=L+w\left(\dfrac{1}{\tan\theta}+\tan\theta\right)$

$L=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}-w\left(\dfrac{1}{\tan\theta}+\tan\theta\right)$ ここで、前の結果から $\tan\theta=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ を上式に入れると、

$$L = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - w\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} + \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - w\left(\frac{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}\right)$$

$$= \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)\left[\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} - w\,(ab)^{-\frac{1}{3}}\right] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

これが求める電柱の長さである。

$a = 3(m)$, $b = 2(m)$, $w = 1(m)$ として計算してみると、

電柱の幅を考慮しない場合、②より $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(3^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 7.023(m)$

電柱の幅を考慮する場合、⑦より $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)\left[\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} - w\,(ab)^{-\frac{1}{3}}\right]$

$$= \left(3^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}\right)\left[\left(3^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\cdot(3\cdot2)^{-\frac{1}{3}}\right] = 5.005(m) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

この結果には少し自信がない。やはり、幅を持った電柱として考えた場合と違いが出て来るかも知れない。

そこで、電柱が幅を持つものとして式を立てると、

図７において ∠ＣＢＯを $\theta$ として、

$AB = \dfrac{b\cos\theta - w}{\sin\theta}$, $CD = \dfrac{a\sin\theta - w}{\cos\theta}$ から、

$OB = a + \dfrac{b\cos\theta - w}{\sin\theta}$, $OC = b + \dfrac{a\sin\theta - w}{\cos\theta}$ となる。

これから、電柱の長さを $\theta$ で表すと次のようになる。

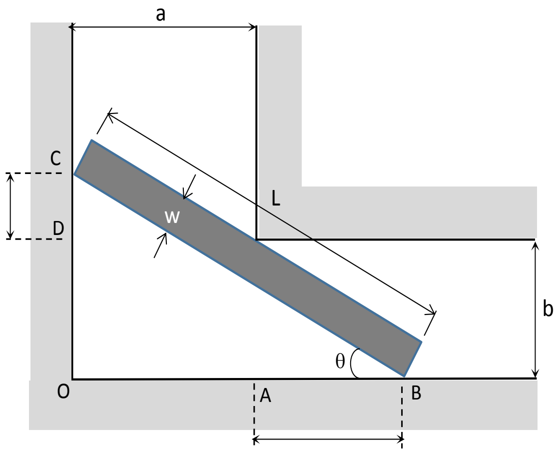


図７

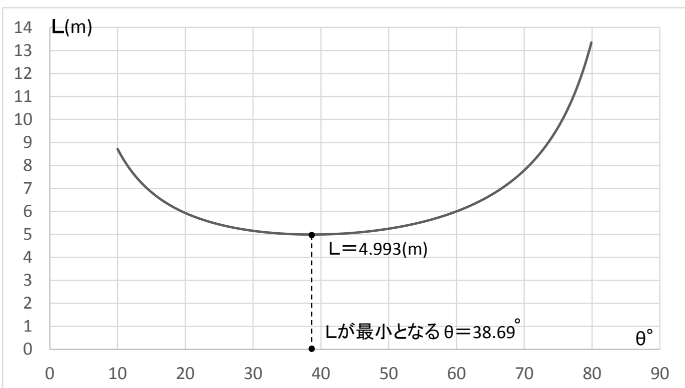
$$L = \sqrt{\left(a + \frac{b\cos\theta - w}{\sin\theta}\right)^2 + \left(b + \frac{a\sin\theta - w}{\cos\theta}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 + w^2}{\sin^2\theta} + \frac{b^2 + w^2}{\cos^2\theta} + \frac{2}{\sin^2\theta\cos^2\theta}(ab\sin\theta\cos\theta - aw\sin\theta - bw\cos\theta)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

⑨は非常に複雑な式であり、微分して最小値を求められそうもない。

ここからは、数値計算で解を求め⑧と比較する。$a = 3(m)$, $b = 2(m)$, $w = 1(m)$ として⑨のグラフを描くと右図のとおりである。

Ｌが最小となる $\theta$ を求めると、$\theta = 38.69°$ $(0.675rad)$ が得られ、これを⑨に入れてＬを



求めると、 $L = 4.993(m)$ となった。この結果は⑧ $5.005(m)$に対し $0.2\%$ の差である。

更に数値を変えて同様の計算を行った結果、⑦と⑨の値は一致することが確認された。以上より、電柱に幅を持たせた問題は見かけ上の長さを増やした幅のない電柱で考えて良いことが分かった。

まとめると、広さ $a \times b$ の交差点を通過できる幅 $w$ の電柱の最大長さは次の式で表される。

$\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)\left[\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} - w\,(ab)^{-\frac{1}{3}}\right]$ あるいは、 $\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)\left[\sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)} - \frac{w}{\sqrt[3]{ab}}\right]$

$\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - w\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$ と変形すると、電柱の太さは「道路幅 比」 及びその「逆比」の $\frac{1}{3}$ 乗で通過できる電柱の長さに関わっていることがわかる。

この問題は、電柱に幅を持たせる問題として方程式を立てて解こうとすると解くことができない。しかし、幅の有無に関わらず問題のポイントが交差点の角を通るレムニスケート曲線の接線の長さを求める問題として解けば、比較的容易に解くことができる。（２０２１．０３．２５）