

## 107 「無限の $i$ 乗」

再びネット上で見つけた問題について考えてみた。

### 【1】自然数の虚数乗の和が実数になることはあるか？

数秘術的に自然数の演算アクロバットをひねくりまわす癖があるヒトならば、考えたことがあるであろう級数和をもて遊んでみよう。

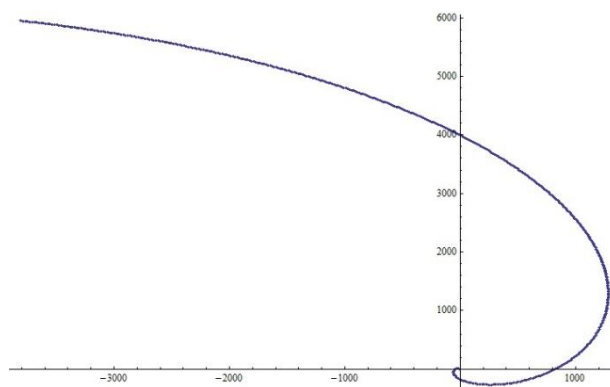
$$1^i + 2^i + 3^i + 4^i + \dots + n^i$$

お題のと通りの自然数の虚数乗の和だ。初項だけの時を除けば、一般的には複素数になる。

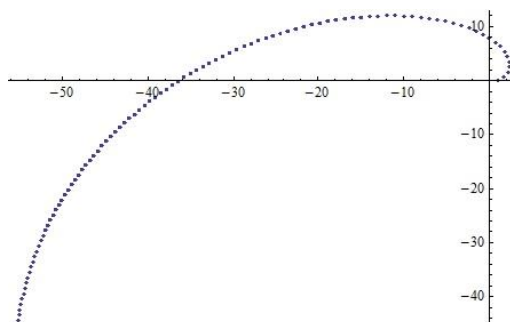
1は何乗しても1だからだ。

$n$ をどんどん大きくして、どこかで実数になることがあるだろうか？

あいにくとそうならない宿命だが、惜しい場所がある。せっかく計算したのだから、その場所をレポートしておきたい。下のグラフが  $n$  が1万までの複素平面での全体像だ。縦軸が虚数軸、横軸が実軸だ。



もう少し手前の  $n=100$  までのプロットを示す。



実軸の-35あたりで交差しているようだ。  $n=51$  前後で実数に接近する。

その精度の高い値は  $-36.4094 - 0.112608i$   $i$ は虚数だ。

しかし、もっと大きな  $n$ 、実軸で800辺りで交差しているようだ。

そこがストレスの実数なりかけの  $n$  である。

$n$  が1173と1174の間に交差があることが20分の探求の結果、判明した。

$n=1173$ の時、 $829.793 - 0.276781i$  となる。 $n=1174$ の時、 $830.5 + 0.430034i$  となる。

そして、級数はリアルワールドから解脱して、永遠に戻ることはないのだ。

郵便番号 830 は福岡県久留米市北野町千代島じゃけ。この級数で町興しだ。  
 この級数は複素共役をとると逆数の和になる。それは虚数部をマイナスにするだけなので、  
 特徴は変わらないことをいい添えておく。n の対数を引いてオイラーの定数的な計算もで  
 きるが顕著な事象はないようなので、将来の宿題にしておく。

なかなか興味深い問題なので考えてみた。

$$1^i + 2^i + 3^i + 4^i + \dots + n^i \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

n を大きくしていった時、 $\textcircled{1}$  が実数になることがあるだろうか？ という問題である。

整数の虚数乗「 $n^i$ 」はどうなるのだろうか？

$$t = n^i \text{ とおくと、} \ln(t) = i \ln(n) \text{ から、} t = e^{i \ln(n)}$$

ここで、オイラーの公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  を使うと、 $t = e^{i \ln(n)} = \cos(\ln(n)) + i \sin(\ln(n))$  より、

$$t = n^i = \cos(\ln(n)) + i \sin(\ln(n)) \text{ よって、}$$

$$1^i + 2^i + 3^i + 4^i + \dots + n^i = \cos(\ln(1)) + \cos(\ln(2)) + \cos(\ln(3)) + \dots + \cos(\ln(n)) \\ + i[\sin(\ln(1)) + \sin(\ln(2)) + \sin(\ln(3)) + \dots + \sin(\ln(n))]$$

$\textcircled{1}$   $n = 1, 2, 3, \dots, 1500$  について、 $\cos(\ln(n))$  の項を x 軸、 $\sin(\ln(n))$  の項を y 軸としてグラフにすると、次のようになる。(図 1-1) (図 1-2)

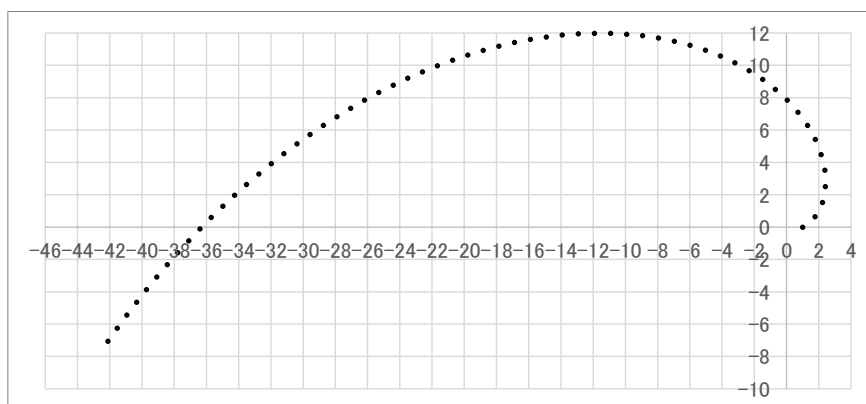


図 1-1 ( $n = 1 \sim 60$  のとき)

最初に実軸と交差するのは、 $n = 50$  から  $51$  になる点である。(図 1-1)

$$n = 50 \text{ のとき、} -35.70572324 + 0.597909691i$$

$$n = 51 \text{ のとき、} -36.40940304 - 0.112607543i \text{ と虚数項の符号が逆転する}$$

次に実軸と交差するのは、 $n = 1173$  から  $1174$  になる点である。(図 1-2)

$$n = 1173 \text{ のとき、} 829.7928421 - 0.276781458i$$

$$n = 1174 \text{ のとき、} 830.5002397 - 0.43003431i$$

$n = 1174$  を超えると、以降実軸と交差することはなく単純に増加する。

従って、 $1^i + 2^i + 3^i + 4^i + \dots + n^i$  は全て複素数で、実数になることはない。

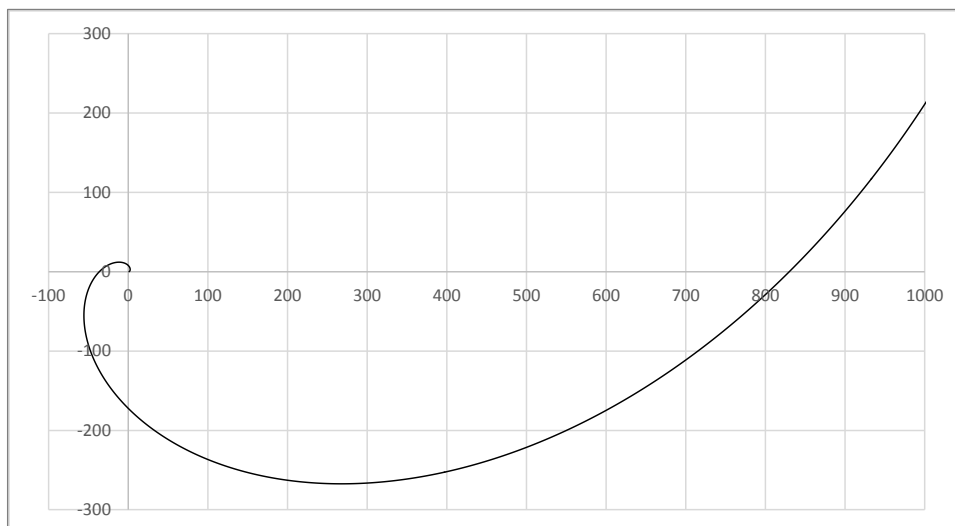


図 1 - 2 (  $n = 1 \sim 1500$  のとき)

②  $n = 1, 3, 5, 7 \dots$  奇数列はどうだろうか? (図 2)

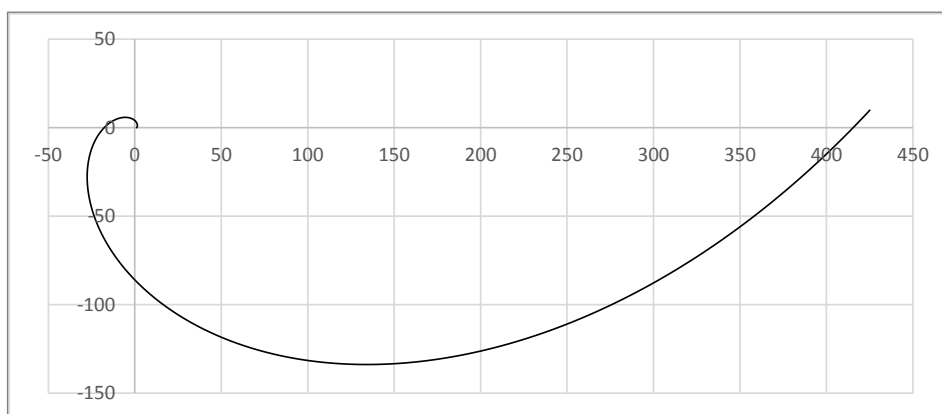


図 2

最初に実軸と交差するのは、 $n = 49$  から  $51$  になる点である。

$n = 49$  のとき、 $-17.40890351 + 0.360167242i$

$n = 51$  のとき、 $-18.1125833 - 0.350349992i$

次に実軸と交差するのは、 $n = 1173$  から  $1174$  になる点である。

$n = 1173$  のとき、 $415.3396423 - 0.076454535i$

$n = 1175$  のとき、 $416.0464379 - 0.630963274i$

これを超えると、以降実軸と交差することはない。奇数列の場合、実軸と交差する点の値が異なるのに、 $n$  が同じなのはなぜだろうか？

自然数列 ( $n$ )、奇数列 ( $2n + 1$ )、偶数列 ( $2n$ )、( $3n + 1$ )、( $4n + 1$ ) などいろいろな数列で試してみたが、いずれもその虚数乗の和が実数になることはなかった。

一つだけ、興味深い数列があった。それはフィボナッチ数列である。

フィボナッチ数列は、第 1 項を 0、第 2 項を 1 とし、一般項は  $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$  で表され、前項と前々項の和で次の項が作られるので、 $n$  が大きくなるに従い急激に増加する数列である。各項は、

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, …  
 となり、その一般項は次のように表される。

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

$n = 1, 2, 3, \dots, 1000$  についてグラフにすると、実数になることはないが、各点が円周上に並ぶことがわかった。(図3)

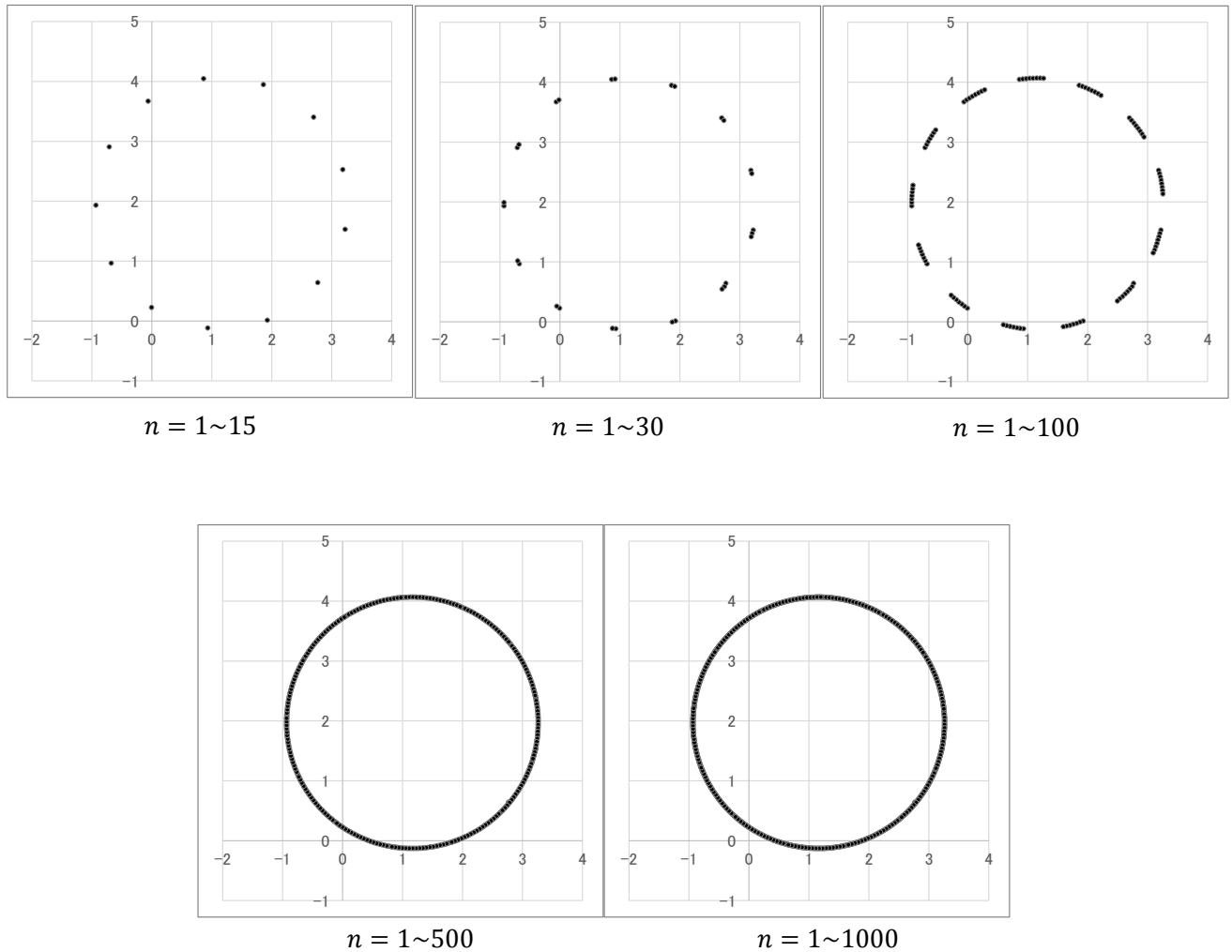


図3

$n = 1 \sim 1000$  において、 $x, y$  の最大値と最小値 (変動範囲) を求めると、  
 $-0.932282123 \leq x \leq 3.264245314$ 、 $-0.130626483 \leq y \leq 4.065905594$  となっている。  
 $x, y$  それぞれの最大値と最小値の差を計算すると、 $x = 4.196527437$ 、 $y = 4.196532077$   
 となり、その比は 0.999998894 であり、円と考えられそうである。  
 円とした場合、 $(x - 1.165981596)^2 + (y - 1.967639556)^2 = 2.098264878^2$  という方程式で表され、  
 中心の座標  $(1.165981596, 1.967639556)$ 、半径 2.098264878 である。

フィボナッチ数列の他に、等比数列のときに円になることが分かった。

自然数列( $n$ ), 奇数列( $2n + 1$ ), 偶数列( $2n$ ), ( $3n + 1$ ), ( $4n + 1$ )などの場合、 $n$ が大きくなると発散してしまうのに、フィボナッチ数列や等比数列だけ、なぜ発散せず円周に点が並ぶのだろうか？

題意とは少し異なるが、

例えば、1, 1.1, 1.21, 1.331, 1.4641, 1.61051……というように公比 1.1 の等比数列の場合、

$$1^i + 1.1^i + 1.21^i + 1.331^i + \dots + 1.1^{(n-1)i} = 1^i + 1.1^i + 1.1^{2i} + 1.1^{3i} + \dots + 1.1^{(n-1)i}$$

$$= \sum_{k=0}^n \cos[\ln(1.1^k)] + i \sum_{k=0}^n \sin[\ln(1.1^k)] = \sum_{k=0}^n \cos[k \ln(1.1)] + i \sum_{k=0}^n \sin[k \ln(1.1)] \text{ と表せる。}$$

上式を計算してグラフに描くと図4のようになる。

これは円のように見えるが、詳しく計算すると、X方向の半径が 10.49594393, Y方向の半径 10.49554981、中心のX座標は 0.500069659, Y座標は 10.48429471 となっている。一般化して、公比を  $a$  とすると次式で表される。

$$\sum_{k=0}^n \cos[k \ln(a)] + i \sum_{k=0}^n \sin[k \ln(a)] \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

Wolfram Alpha を用いて、この数列の和を求めると次のような式が得られた。

$$\sum_{k=0}^n \cos[k \ln(a)] = \frac{\cos\left[\frac{n \cdot \ln(a)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\ln(a)}{2}\right]} \sin\left[\frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2}\right]$$

$$\sum_{k=0}^n \sin[k \ln(a)] = \frac{\sin\left[\frac{n \cdot \ln(a)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\ln(a)}{2}\right]} \sin\left[\frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2}\right]$$

複素平面上の点で表すと次のようになる。

$$\frac{\cos\left[\frac{n \cdot \ln(a)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\ln(a)}{2}\right]} \sin\left[\frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2}\right] + i \frac{\sin\left[\frac{n \cdot \ln(a)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\ln(a)}{2}\right]} \sin\left[\frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2}\right] \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

③ をもとに、この式が表す曲線を導く。実数項 =  $x$ , 虚数項 =  $y$  として、 $n$  を消去すればよいので、

$$x = \frac{\cos\left[\frac{n \cdot \ln(a)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\ln(a)}{2}\right]} \sin\left[\frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2}\right], \quad y = \frac{\sin\left[\frac{n \cdot \ln(a)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\ln(a)}{2}\right]} \sin\left[\frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2}\right] \text{ これを変形して、}$$

$$x = \frac{\cos\left[\frac{n \cdot \ln(a)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\ln(a)}{2}\right]} \sin\left[\frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2}\right] = \frac{\sin\left[\frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2}\right] + \sin\left[\frac{\ln(a)}{2}\right]}{2 \sin\left[\frac{\ln(a)}{2}\right]}$$

$$y = \frac{\sin\left[\frac{n \cdot \ln(a)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\ln(a)}{2}\right]} \sin\left[\frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2}\right] = \frac{-\cos\left[\frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2}\right] + \cos\left[\frac{\ln(a)}{2}\right]}{2 \sin\left[\frac{\ln(a)}{2}\right]}$$

$$2 \sin\left[\frac{\ln(a)}{2}\right] \left(x - \frac{1}{2}\right) = \sin\left[\frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2}\right] \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

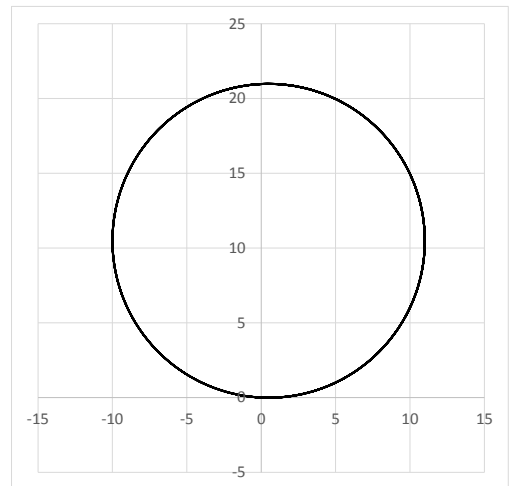


図 4

$$2 \sin \left[ \frac{\ln(a)}{2} \right] \left[ y - \frac{\cos \left[ \frac{\ln(a)}{2} \right]}{2 \sin \left[ \frac{\ln(a)}{2} \right]} \right] = -\cos \left[ \frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2} \right] \dots\dots\dots ⑤$$

④<sup>2</sup> + ⑤<sup>2</sup> を作ると、右辺は  $\left[ \sin \frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2} \right]^2 + \left[ -\cos \frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2} \right]^2 = 1$  となるので、

$$\left[ 2 \sin \left[ \frac{\ln(a)}{2} \right] \left( x - \frac{1}{2} \right) \right]^2 + \left[ 2 \sin \left[ \frac{\ln(a)}{2} \right] \left[ y - \frac{\cos \left[ \frac{\ln(a)}{2} \right]}{2 \sin \left[ \frac{\ln(a)}{2} \right]} \right] \right]^2 = \left[ \sin \frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2} \right]^2 + \left[ -\cos \frac{(n+1) \cdot \ln(a)}{2} \right]^2 = 1$$

以上より、 $\left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left[ y - \frac{\cos \left[ \frac{\ln(a)}{2} \right]}{2 \sin \left[ \frac{\ln(a)}{2} \right]} \right]^2 = \left[ \frac{1}{2 \sin \left[ \frac{\ln(a)}{2} \right]} \right]^2 \dots\dots\dots ⑥$

⑥は  $\left( \frac{1}{2}, \frac{\cos \left[ \frac{\ln(a)}{2} \right]}{2 \sin \left[ \frac{\ln(a)}{2} \right]} \right)$  を中心とする、半径  $\frac{1}{2 \sin \left[ \frac{\ln(a)}{2} \right]}$  の円の方程式を示している。

これで、図4が円であることが証明され、等比数列の  $i$  乗で作られる点は円になることが明らかになった。公比  $a = 1.1$  とした時の半径、中心を計算してみると、

半径  $\frac{1}{2 \sin \left[ \frac{\ln(a)}{2} \right]} = \frac{1}{2 \sin \left[ \frac{\ln(1.1)}{2} \right]} = 10.496031$ , 中心の  $x$  座標は  $\frac{1}{2}$ ,  $y$  座標は  $\frac{\cos \left[ \frac{\ln(1.1)}{2} \right]}{2 \sin \left[ \frac{\ln(1.1)}{2} \right]} = 10.48411497$

となり、図4とほとんど一致することが確認される。

さらに、次の等比数列が実数になる公比  $a$  を求めてみると、

$$1^i + a^i + a^{2i} + a^{3i} + \dots\dots\dots + a^{(n-1)i} = \sum_{k=0}^n a^{ki} \dots\dots\dots ⑦$$

$a^{ki} = \cos k + i \sin k$  から、 $\sin k = 0$  となればいいので、 $k = n\pi$  である。

よって⑦は、 $\sum_{k=0}^n a^{kni} = 1^i + e^{\pi i} + e^{2\pi i} + e^{3\pi i} + \dots\dots\dots + e^{(2n-1)\pi i} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots\dots\dots$

となり、実数となるがその値は不定である。

次に、なぜフィボナッチ数列の時に円になるのだろうか？

フィボナッチ数列の一般項は、 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$  と表される。

$n = 1 \sim 30$  までの  $F_n$  と  $F_n/F_{n-1}$  を計算して表にすると、次のようになる。

n	F <sub>n</sub>	F <sub>n</sub> /F <sub>n-1</sub>	n	F <sub>n</sub>	F <sub>n</sub> /F <sub>n-1</sub>	n	F <sub>n</sub>	F <sub>n</sub> /F <sub>n-1</sub>
1	1		11	89	1.617977528	21	10946	1.618033985
2	1	2	12	144	1.618055556	22	17711	1.618033999
3	2	1.5	13	233	1.618025751	23	28657	1.618033988
4	3	1.666666667	14	377	1.618037135	24	46368	1.618033989
5	5	1.6	15	610	1.618032787	25	75025	1.618033989
6	8	1.625	16	987	1.618034448	26	121393	1.618033989
7	13	1.615384615	17	1597	1.618033813	27	196418	1.618033989
8	21	1.619047619	18	2584	1.618034056	28	317811	1.618033989
9	34	1.617647059	19	4181	1.618033963	29	514229	1.618033989
10	55	1.618181818	20	6765	1.618033999	30	832040	1.618033989

表から分かるように、 $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ の値は  $n > 20$  以上で  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033989$  (黄金比) に収束する。

これから、フィボナッチ数列は完全な等比数列ではないが、 $n > 20$  以上では公比  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  の等比数列と見なせることから、円になることが理解される。

## 【2】誰もが知りたい複素無限積の一例

今日も誰もが知りたいかもしれない、複素数の無限積の動きを追跡してみた。

$$(1 + \frac{i}{2}) (1 + \frac{i}{3}) (1 + \frac{i}{4}) \dots (1 + \frac{i}{n})$$

クローズした式での表記はこうなるだろう。

$$\prod_{k=1}^n (1 + \frac{i}{k})$$

二次元座標にすると最初の9項はこうなる。実部と虚部を x 座標、y 座標にしている。

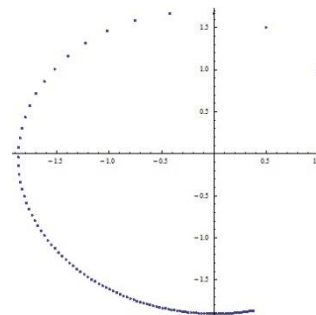
{1, 1}, {1/2, 3/2}, {0, 5/3}, {-(5/12), 5/3}, {-(3/4), 19/12}, {-(73/72), 35/24},  
{-(11/9), 331/252}, {-(2795/2016), 65/56}, {-(3055/2016), 18265/18144}

3項目は実部が0で、純虚数である。おそらく、これが唯一無二の純虚数になる項だ。

$$\text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(1/2) + \text{Arctan}(1/3) = \pi / 2$$

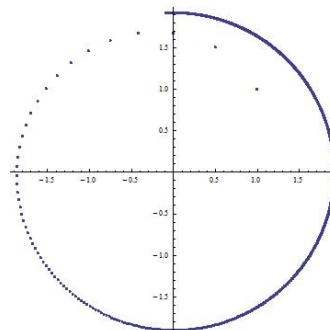
n=1904の時には、(0.00070245245166408679480, 1.9168066458102493393) と純虚数にかなり近くなるが、実部はゼロではない。こんなのが無限回出現するだけであろう。

そのパターンをガウス平面に描く (最初の100項)



(1, 1) から出発して、左回りの軌跡を描き出し、次第に半径は一定値に落ち着く。

2000項までではその特徴がはっきりしてくる。



リミットサイクルのようにある極限の半径の円に巻き付いてゆくようだ。  
つまり、半径は極限があるが、偏角はどこまでも増え続けるような傾向にある。

$$\sqrt{\frac{\text{Sinh}[\pi]}{\pi}} = 1.9173100715259$$

半径の極限值は 1.91 に収束することが証明できる。偏角は下式となり、定まらない。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{ArcTan}\left[\frac{1}{n}\right]$$

考えてみれば、

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{i}{k}\right)$$

も同じような特徴を示す（偏角の増大に向きは逆）

さらに、この二種の複素数の積は下式を因数分解したものである。

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\text{Sinh}[\pi]}{\pi}$$

極限值に双曲線関数 (hyperbolic function) が顔を出すのが心憎い。

この問題もなかなか興味深い。

$$(1+i)\left(1+\frac{i}{2}\right)\left(1+\frac{i}{3}\right)\left(1+\frac{i}{4}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{i}{n}\right) \cdots\cdots\cdots\textcircled{8}$$

n を大きくしていった時、⑧が純虚数（実部がゼロ）になることがあるだろうか？

また、複素平面上に点を描く時、その軌跡は円に近づいて行くが、その半径はどうなるだろうか？  
という問題である。⑧を P とおき、その対数を取ると、積が和の形に変換される。

$$\ln(P) = \ln\left[\left(1+i\right)\left(1+\frac{i}{2}\right)\left(1+\frac{i}{3}\right)\left(1+\frac{i}{4}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{i}{n}\right)\right]$$

$$= \ln(1+i) + \ln\left(1+\frac{i}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{i}{3}\right) + \ln\left(1+\frac{i}{4}\right) \cdots\cdots\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)$$

$$1+i = \sqrt{1^2+1^2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ と表せるので、} \ln(1+i) = \ln\left[\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right] = \ln\sqrt{2} + \frac{i\pi}{4}$$

$$\ln\left(1+\frac{i}{2}\right) = \ln\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(\tan^{-1}\frac{1}{2})}\right] = \ln\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right] + i \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{同様に、} \ln\left(1+\frac{i}{3}\right) = \ln\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2} e^{i(\tan^{-1}\frac{1}{3})}\right] = \ln\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right] + i \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$



$$\ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) = \ln\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} e^{i \tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)}\right] = \ln\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}\right] + i \tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

以上より、 $\ln(P)$  の実部 (Re), 及び虚部 (Im) は、

$$\operatorname{Re}[\ln(P)] = \ln\sqrt{2} + \ln\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right] + \ln\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}\right] + \cdots \cdots \ln\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}\right] = \sum_{k=1}^n \ln\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{k}\right)^2}\right]$$

$$\operatorname{Im}[\ln(P)] = \frac{\pi}{4} \left[ \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) \right] + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots \cdots \tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left[ \tan^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) \right]$$

複素平面上の点は、 $X = \left[ \sum_{k=1}^n \ln\left\{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{k}\right)^2}\right\} \right] \times \cos \sum_{k=1}^n \left[ \tan^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) \right]$  .....⑨

$$Y = \left[ \sum_{k=1}^n \ln\left\{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{k}\right)^2}\right\} \right] \times \sin \sum_{k=1}^n \left[ \tan^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) \right] \text{ で与えられる。} \text{ .....⑩}$$

⑨⑩は、

$n = 1904 \sim 1905$  の間で虚数軸と交差し、実部が0に近くなるのは、

$n = 1904$  のとき、 $0.000702452 + 1.916806646 i$

$n = 1905$  のとき、 $-0.000303745 + 1.916807015 i$  である。

$n = 1, 2, 3 \cdots \cdots, 10000$  についてグラフを描くと図5-1のとおりである。

$n = 10000$  のとき、 $-1.909920928 - 0.167070005 i$

$n = 20000$  のとき、 $-1.362501995 - 1.348881918 i$

であり、 $n$ が大きくなるに従ってプロットの間隔はどんどん小さくなっていく。(図5-2)

$n = 1904 \sim 1905$  の次に虚数軸と交差するのは、 $n = 44087 \sim 44088$ の間である。

$n = 44087$  のとき  $-4.58701 \times 10^{-6} - 1.917288327 i$

$n = 44088$  のとき  $3.89008 \times 10^{-5} - 1.917288327 i$

となり、0ではないが実部は非常に小さい値となっている。

以上からわかるように、 $n \rightarrow \infty$  とすると無限回円を周回すると予想されるが、その速度は非常に遅い。

次に、 $n \rightarrow \infty$  のときの円の半径は次式で表される

$$\operatorname{Re}[\ln(P)] = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{k}\right)^2}\right]$$

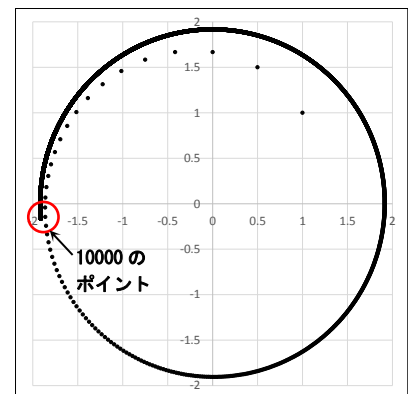


図5-1 ( $n = 1 \sim 10000$ )

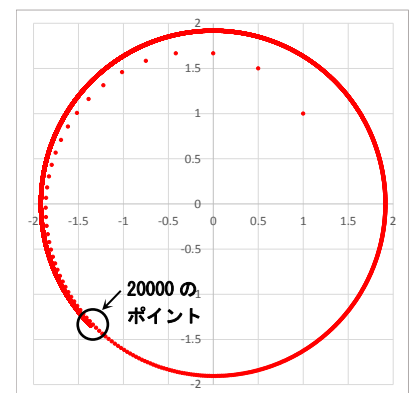


図5-2 ( $n = 1 \sim 20000$ )

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} \right] = \ln \left[ \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} \right\} \right] \text{ であるから、 } \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} \right\} \text{ を求めればよい。}$$

Wolfram Alpha を用いて、この無限積を求めると次のような式が得られた。

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} \right\} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\Gamma[n + (1+i)]} \sqrt{\Gamma[n + (1-i)]}}{\sqrt{\Gamma(2+i)\Gamma(2-i)} \Gamma(n+1)} \dots\dots\dots \textcircled{11}$$

$\Gamma$  はガンマ関数である。

ガンマ関数は、実部が正の複素数  $z$  に対し、 $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$  で定義される複素関数で、

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

という関係が成り立つ。また、恒等式  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$  が知られている。

$$\textcircled{11} \text{ の分母 } \sqrt{\Gamma(2+i)\Gamma(2-i)} \text{ について、 } \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ を使うと、 } \sqrt{\Gamma(2+i)\Gamma(2-i)} \\ = \sqrt{\Gamma[(1+(1+i))\Gamma[(1+(1-i))] = \sqrt{(1+i)\Gamma(1+i)(1-i)\Gamma(1-i)} = \sqrt{2}\sqrt{\Gamma(1+i)\Gamma(1-i)}}$$

さらに、恒等式  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$  を使って変形すると、

$$\sqrt{2}\sqrt{\Gamma(1+i)\Gamma(1-i)} = \sqrt{2}\sqrt{i\Gamma(i)\Gamma(1-i)} = \sqrt{2} \sqrt{i \frac{\pi}{\sin(\pi i)}}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ に } x = \pi i \text{ を入れると、 } \sin(\pi i) = \frac{e^{i(\pi i)} - e^{-i(\pi i)}}{2i} = -\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2i} = -\frac{1}{i} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}$$

$$= -\frac{1}{i} \sinh(\pi) \text{ となるので、 } \sqrt{2} \sqrt{i \frac{\pi}{\sin(\pi i)}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\pi}{\sinh(\pi)}}$$

$\textcircled{11}$  から分母  $\sqrt{\Gamma(2+i)\Gamma(2-i)}$  を除いた残りの  $\frac{\sqrt{2} \sqrt{\Gamma[n + (1+i)]} \sqrt{\Gamma[n + (1-i)]}}{\Gamma(n+1)}$  について、

$$\frac{\sqrt{2} \sqrt{\Gamma[n + (1+i)]} \sqrt{\Gamma[n + (1-i)]}}{\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{(n+i)\Gamma(n+i)(n-i)\Gamma(n-i)}}{\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{n^2+1} \sqrt{\Gamma(n+i)\Gamma(n-i)}}{n\Gamma(n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} \sqrt{n^2+1} \sqrt{\Gamma(n+i)\Gamma(n-i)}}{n\Gamma(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} \sqrt{n^2+1}}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\Gamma(n+i)\Gamma(n-i)}}{\Gamma(n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\Gamma(n+i)\Gamma(n-i)}}{\Gamma(n)} = 1 \text{ だから、 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} \sqrt{n^2+1}}{n} \frac{\sqrt{\Gamma(n+i)\Gamma(n-i)}}{\Gamma(n)} = \sqrt{2} \text{ となる。}$$

従って $\textcircled{11}$ は、

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{\Gamma[n+(1+i)]}\sqrt{\Gamma[n+(1-i)]}}{\sqrt{\Gamma(2+i)\Gamma(2-i)\Gamma(n+1)}} = \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{\sinh(\pi)}}} = \sqrt{\frac{\sinh(\pi)}{\pi}} \quad \text{以上より、}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} \right\} = \sqrt{\frac{\sinh(\pi)}{\pi}} \quad \text{が導かれた。}$$

$$\sqrt{\frac{\sinh(\pi)}{\pi}} \text{ を計算すると、円の半径は } \sqrt{\frac{11.54873936}{3.141592654}} = 1.917310072 \text{ となる。}$$

さらに、 $(1-i)\left(1-\frac{i}{2}\right)\left(1-\frac{i}{3}\right)\left(1-\frac{i}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{i}{n}\right)$  については、

$$\ln\left(1+\frac{i}{n}\right) = \ln\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} e^{i\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)}\right] = \ln\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right] + i\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ において、 } \frac{i}{n} \rightarrow -\frac{i}{n} \text{ とすること}$$

$$\text{に相当し、} \ln\left(1-\frac{i}{n}\right) = \ln\left[\sqrt{1+\left(-\frac{1}{n}\right)^2} e^{i\tan^{-1}\left(-\frac{1}{n}\right)}\right] = \ln\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right] + i\tan^{-1}\left(-\frac{1}{n}\right)$$

となり、実数部分は変わらず、虚数部分がX軸に対称となることを示している。点の軌跡が反時計回りから時計回りになるだけである。従って、 $n \rightarrow \infty$ のときの円の半径は変わらない。

三角関数の無限乗積展開の公式、

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{n^2}\right] \text{ において、 } x = ix \text{ とおくと、 } \sin(\pi ix) = \pi ix \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{(ix)^2}{n^2}\right]$$

$$\sin(\pi ix) = i \sinh(\pi x) \text{ であるから、 } i \sinh(\pi x) = \pi ix \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{(ix)^2}{n^2}\right]$$

$$\sinh(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right) \text{ 以上から、 } \frac{\sinh(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right) \text{ ここで } x = 1 \text{ とすると、}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \text{ が導かれる。}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{ni}\right)\left(1 - \frac{1}{ni}\right) = \left(1 + \frac{i}{n}\right)\left(1 - \frac{i}{n}\right) \text{ から、 } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)\left(1 - \frac{i}{n}\right)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)\left(1 - \frac{i}{n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{i}{n}\right) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}, \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right) = \sqrt{\frac{\sinh(\pi)}{\pi}} \text{ だから、}$$

$$\text{計算によって } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{i}{n}\right) = \sqrt{\frac{\sinh(\pi)}{\pi}} \text{ が得られる。}$$

虚数の世界を通して見ることで、面白い発見があり興味は尽きない。(2021.05.16)