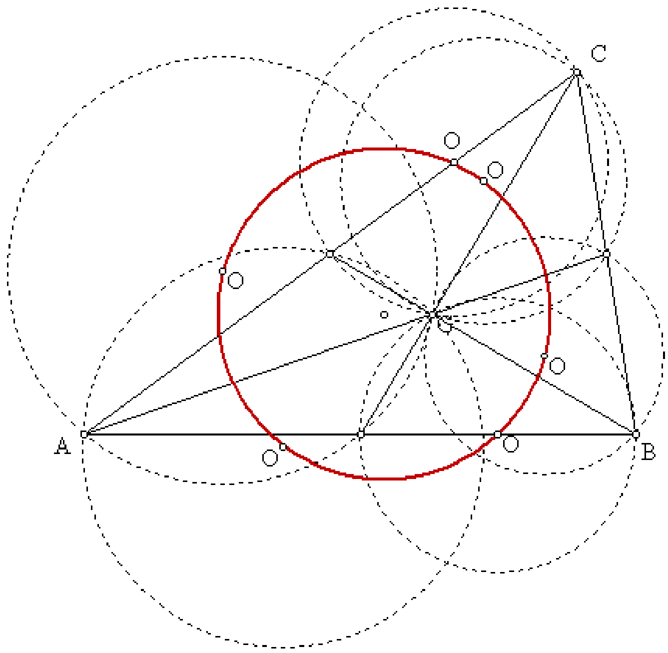
１０８「ヴァン・ラモン円」

「ヴァン・ラモン円」はとても不思議な美しい定理。三角形のもつ奥深い性質の一つである。

Floor van Lamoen 円

三角形の頂点と対向する辺の中点を結ぶ線（中線）は一点で交わり、この点は重心である。３本の中線により、もとの三角形は６つの三角形に分割される。

分割されてできた６つの三角形の外接円を描くと、それぞれの外接円の中心（外心）は一つの円周上に並ぶ。この円をヴァン・ラモン円と呼ぶ。



この問題は、２０００年 American Mathematical Monthly 誌にオランダ人数学者フロア・ヴァン・ラモンが発表したものである。そして２００３年、Alexei Myakishev と Peter Y.Woo によりこの問題の証明が発表された。

証明の内容は幾何学的なもので、６つの外心で作られる六角形の中の、対向する２本の直線が並行である、ということを利用した証明であった。この証明では、ヴァン・ラモン円の半径は示されていない。

私としては、是非この問題を別の方法で証明し円の半径を求めたいと考えた。

証明の方針は以下のとおりである。

・平面座標において、６つの外心の座標を決定する
・円は３つの点で特定されるので、６つの点からは２つの円が導かれる
・その２つの円が一致することを示せば、６つの点が同一円周上にあることが証明される

この方針に基づき、証明を試みたが驚くほど複雑な計算になった。以下、それを示そう。

【証 明】

図１に示す三角形ＡＢＣにおいて、重心をＧ，各辺の中点をＡ’Ｂ’Ｃ’とする。三辺の長さをａ，ｂ，ｃ、各頂点の角度をα，β，γ、∠ＡＧＢ’∠ＡＧＣ’ＢＧＣ’をそれぞれθ_1，θ_2，θ_3とする。

分割された６つの三角形、ＢＧＡ’ＣＧＡ’ＣＧＢ’ＡＧＢ’ＢＧＣ’ＡＧＣ’の外心に番号を付け、それぞれ(1) (2) (3) (4) (5) (6) とする。外心は３辺の垂直二等分線が交わる点で、各頂点から同じ距離にある。

点Ｂを原点とするＸＹ座標を定め、(1)～(6) を座標で表す。

三角形の外心は図２に示すように、１辺の中点から鉛直上 $\frac{a}{2}\cot\alpha$ の位置となる。この時 α はその辺の対向する頂点の角度である。

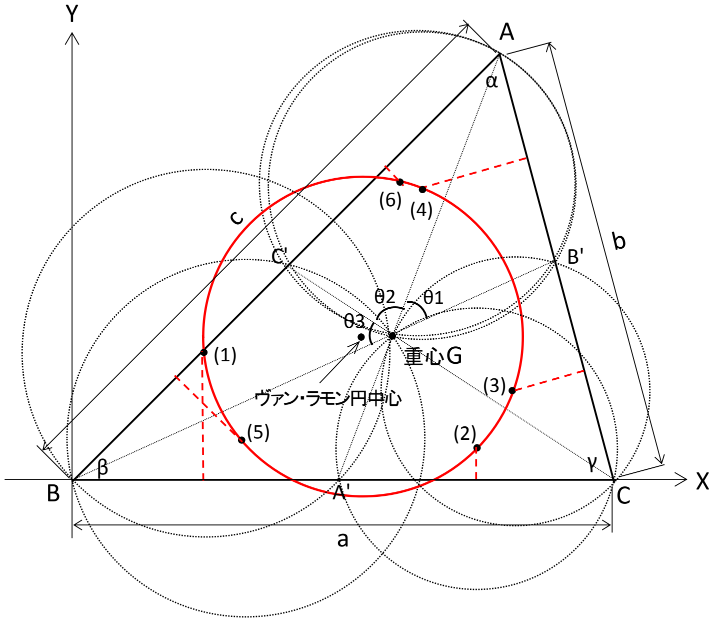


図１

これに基づき、例として図３に外心のＸ，Ｙ座標の求め方を示した。この方法により、図１のθ_1，θ_2，θ_3を用いて(1)～(6) を座標で表すと表１のとおりである。

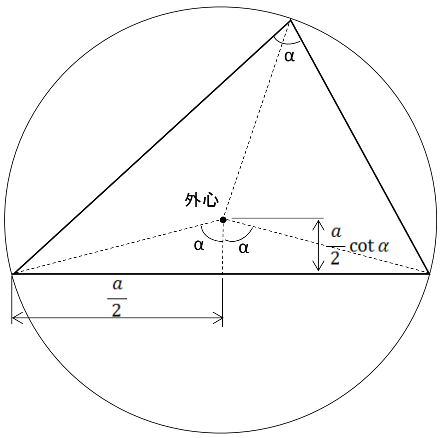


図２ 外心の位置

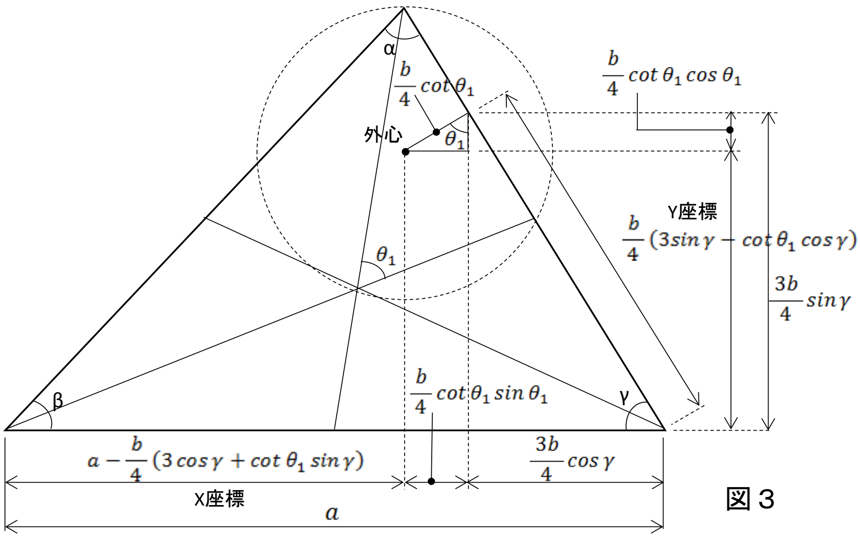


図３

外心	Ｘ座標	Ｙ座標	外心	Ｘ座標	Ｙ座標
(1)	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{4}\cot\theta_1$	(2)	$\frac{3a}{4}$	$\frac{a}{4}\cot\theta_2$
(3)	$\frac{c}{4}(\cos\beta+\cot\theta_3\sin\beta)$	$\frac{c}{4}(\sin\beta-\cot\theta_3\cos\beta)$	(4)	$\frac{c}{4}(3\cos\beta+\cot\theta_2\sin\beta)$	$\frac{c}{4}(3\sin\beta-\cot\theta_2\cos\beta)$
(5)	$a-\frac{b}{4}(\cos\gamma+\cot\theta_3\sin\gamma)$	$\frac{b}{4}(\sin\gamma-\cot\theta_3\cos\gamma)$	(6)	$a-\frac{b}{4}(3\cos\gamma+\cot\theta_1\sin\gamma)$	$\frac{b}{4}(3\sin\gamma-\cot\theta_1\cos\gamma)$

表１

円の方程式は一般に、$x^2+y^2+m_1x+n_1y+l_1=0$ ･････････････････①

$x^2+y^2+m_2x+n_2y+l_2=0$ ･････････････････②

と表せる。このように表した時、

円の中心及び半径は、①の場合 $\left(-\frac{m_1}{2},\ -\frac{n_1}{2}\right)$, $\sqrt{\left(\frac{m_1}{2}\right)^2+\left(\frac{n_1}{2}\right)^2-l_1}$ である。

① 式に点(1) (3) (5)を、②式に点(2) (4) (6)を入れて、それぞれ３点を通る円を求め、それが同じ円であればこの定理が証明される。①，②を導き、$m_1=m_2$，$n_1=n_2$ となることが確認されればよい。$m_1=m_2$，$n_1=n_2$ のとき、必然的に $l_1=l_2$ となる。

① に(1) (3) (5)の座標 $\left(x_{(1)},y_{(1)}\right)$，$\left(x_{(3)},y_{(3)}\right)$，$\left(x_{(5)},y_{(5)}\right)$ を入れて、

$x_{(1)}{}^2+y_{(1)}{}^2+m_1x_{(1)}+n_1y_{(1)}+l_1=0$ ･････････････････①－1

$x_{(3)}{}^2+y_{(3)}{}^2+m_1x_{(3)}+n_1y_{(3)}+l_1=0$ ･････････････････①－2

$x_{(5)}{}^2+y_{(5)}{}^2+m_1x_{(5)}+n_1y_{(5)}+l_1=0$ ･････････････････①－3

［①－2］－［①－1］，［①－3］－［①－1］を作ると、

$(x_{(3)}{}^2-x_{(1)}{}^2)+(y_{(3)}{}^2-y_{(1)}{}^2)+(x_{(3)}-x_{(1)})m_1+(y_{(3)}-y_{(1)})n_1=0$ ･････････････････③

$(x_{(5)}{}^2-x_{(1)}{}^2)+(y_{(5)}{}^2-y_{(1)}{}^2)+(x_{(5)}-x_{(1)})m_1+(y_{(5)}-y_{(1)})n_1=0$ ･････････････････④

③×$\left(y_{(5)}-y_{(1)}\right)$，④×$\left(y_{(3)}-y_{(1)}\right)$ を作り、m_1，n_1 を求める。

$$m_1=\frac{\left[(x_{(5)}{}^2+y_{(5)}{}^2)-(x_{(1)}{}^2+y_{(1)}{}^2)\right]\left(y_{(3)}-y_{(1)}\right)-\left[(x_{(3)}{}^2+y_{(3)}{}^2)-(x_{(1)}{}^2+y_{(1)}{}^2)\right]\left(y_{(5)}-y_{(1)}\right)}{\left(x_{(3)}-x_{(1)}\right)\left(y_{(5)}-y_{(1)}\right)-\left(x_{(5)}-x_{(1)}\right)\left(y_{(3)}-y_{(1)}\right)} \quad \cdots\cdots⑤$$

$$n_1=\frac{\left[(x_{(5)}{}^2+y_{(5)}{}^2)-(x_{(1)}{}^2+y_{(1)}{}^2)\right]\left(x_{(3)}-x_{(1)}\right)-\left[(x_{(3)}{}^2+y_{(3)}{}^2)-(x_{(1)}{}^2+y_{(1)}{}^2)\right]\left(x_{(5)}-x_{(1)}\right)}{\left(x_{(5)}-x_{(1)}\right)\left(y_{(3)}-y_{(1)}\right)-\left(x_{(3)}-x_{(1)}\right)\left(y_{(5)}-y_{(1)}\right)} \quad \cdots\cdots⑥$$

m_1，n_1 についても同様に、

$$m_2=\frac{\left[(x_{(6)}{}^2+y_{(6)}{}^2)-(x_{(2)}{}^2+y_{(2)}{}^2)\right]\left(y_{(4)}-y_{(2)}\right)-\left[(x_{(4)}{}^2+y_{(4)}{}^2)-(x_{(2)}{}^2+y_{(2)}{}^2)\right]\left(y_{(6)}-y_{(2)}\right)}{\left(x_{(4)}-x_{(2)}\right)\left(y_{(6)}-y_{(2)}\right)-\left(x_{(6)}-x_{(2)}\right)\left(y_{(4)}-y_{(2)}\right)} \quad \cdots\cdots⑦$$

$$n_2=\frac{\left[(x_{(6)}{}^2+y_{(6)}{}^2)-(x_{(2)}{}^2+y_{(2)}{}^2)\right]\left(x_{(4)}-x_{(2)}\right)-\left[(x_{(4)}{}^2+y_{(4)}{}^2)-(x_{(2)}{}^2+y_{(2)}{}^2)\right]\left(x_{(6)}-x_{(2)}\right)}{\left(x_{(6)}-x_{(2)}\right)\left(y_{(4)}-y_{(2)}\right)-\left(x_{(4)}-x_{(2)}\right)\left(y_{(6)}-y_{(2)}\right)} \quad \cdots\cdots⑧$$

m_1，n_1 について、分母と分子を別々にして表１のＸ，Ｙ座標を入れると、

$$m_1\text{分子}=\left[\left\{a-\frac{b}{4}(\cos\gamma+\cot\theta_3\sin\gamma)\right\}^2+\left\{\frac{b}{4}(\sin\gamma-\cot\theta_3\cos\gamma)\right\}^2-\left\{\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\cot\theta_1\right)^2\right\}\right]$$

$$\times\left[\frac{c}{4}(\sin\beta-\cot\theta_3\cos\beta)-\frac{a}{4}\cot\theta_1\right]$$

$$-\left[\left\{\frac{c}{4}(\cos\beta+\cot\theta_3\sin\beta)\right\}^2+\left\{\frac{c}{4}(\sin\beta-\cot\theta_3\cos\beta)\right\}^2-\left\{\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\cot\theta_1\right)^2\right\}\right]$$

$$\times\left[\frac{b}{4}(\sin\gamma-\cot\theta_3\cos\gamma)-\frac{a}{4}\cot\theta_1\right]$$

$$n_1\text{分子}=\left[\left\{a-\frac{b}{4}(\cos\gamma+\cot\theta_3\sin\gamma)\right\}^2+\left\{\frac{b}{4}(\sin\gamma-\cot\theta_3\cos\gamma)\right\}^2-\left\{\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\cot\theta_1\right)^2\right\}\right]$$

$$\times\left[\frac{c}{4}(\cos\beta+\cot\theta_3\sin\beta)-\frac{a}{4}\right]$$

$$-\left[\left\{\frac{c}{4}(\cos\beta+\cot\theta_3\sin\beta)\right\}^2+\left\{\frac{c}{4}(\sin\beta-\cot\theta_3\cos\beta)\right\}^2-\left\{\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\cot\theta_1\right)^2\right\}\right]$$

$$\times\left[a-\frac{b}{4}(\cos\gamma+\cot\theta_3\sin\gamma)-\frac{a}{4}\right]$$

m_2，n_2 について同様に、

$$m_2\text{分子}=\left[\left\{a-\frac{b}{4}(3\cos\gamma+\cot\theta_1\sin\gamma)\right\}^2+\left\{\frac{b}{4}(3\sin\gamma-\cot\theta_1\cos\gamma)\right\}^2-\left\{\left(\frac{3a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\cot\theta_2\right)^2\right\}\right]$$

$$\times\left[\frac{c}{4}(3\sin\beta-\cot\theta_2\cos\beta)-\frac{a}{4}\cot\theta_2\right]$$

$$-\left[\left\{\frac{c}{4}(3\cos\beta+\cot\theta_2\sin\beta)\right\}^2+\left\{\frac{c}{4}(3\sin\beta-\cot\theta_2\cos\beta)\right\}^2-\left\{\left(\frac{3a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\cot\theta_2\right)^2\right\}\right]$$

$$\times\left[\frac{b}{4}(3\sin\gamma-\cot\theta_1\cos\gamma)-\frac{a}{4}\cot\theta_2\right]$$

$$n_2\text{分子}=\left[\left\{a-\frac{b}{4}(3\cos\gamma+\cot\theta_1\sin\gamma)\right\}^2+\left\{\frac{b}{4}(3\sin\gamma-\cot\theta_1\cos\gamma)\right\}^2-\left\{\left(\frac{3a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\cot\theta_2\right)^2\right\}\right]$$

$$\times\left[\frac{c}{4}(3\cos\beta+\cot\theta_2\sin\beta)-\frac{3a}{4}\right]$$

$$-\left[\left\{\frac{c}{4}(3\cos\beta+\cot\theta_2\sin\beta)\right\}^2+\left\{\frac{c}{4}(3\sin\beta-\cot\theta_2\cos\beta)\right\}^2-\left\{\left(\frac{3a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\cot\theta_2\right)^2\right\}\right]$$

$$\times\left[a-\frac{b}{4}(3\cos\gamma+\cot\theta_1\sin\gamma)-\frac{3a}{4}\right]$$

m_1，n_1，m_2，n_2 の分母ついても同じように、

$$m_1\text{分母}=\left(\frac{c}{4}(\cos\beta+\cot\theta_3\sin\beta)-\frac{a}{4}\right)\left(\frac{b}{4}(\sin\gamma-\cot\theta_3\cos\gamma)-\frac{a}{4}\cot\theta_1\right)$$

$$-\left(a-\frac{b}{4}(\cos\gamma+\cot\theta_3\sin\gamma)-\frac{a}{4}\right)\left(\frac{c}{4}(\sin\beta-\cot\theta_3\cos\beta)-\frac{a}{4}\cot\theta_1\right)$$

$$n_1\text{分母}=\left(a-\frac{b}{4}(\cos\gamma+\cot\theta_3\sin\gamma)-\frac{a}{4}\right)\left(\frac{c}{4}(\sin\beta-\cot\theta_3\cos\beta)-\frac{a}{4}\cot\theta_1\right)$$

$$-\left(\frac{c}{4}(\cos\beta+\cot\theta_3\sin\beta)-\frac{3a}{4}\right)\left(\frac{b}{4}(\sin\gamma-\cot\theta_3\cos\gamma)-\frac{a}{4}\cot\theta_1\right)$$

$$m_2\text{分母}=\left(\frac{c}{4}(3\cos\beta+\cot\theta_2\sin\beta)-\frac{3a}{4}\right)\left(\frac{b}{4}(3\sin\gamma-\cot\theta_1\cos\gamma)-\frac{a}{4}\cot\theta_2\right)$$

$$-\left(a-\frac{b}{4}(3\cos\gamma+\cot\theta_1\sin\gamma)-\frac{a}{4}\right)\left(\frac{c}{4}(3\sin\beta-\cot\theta_2\cos\beta)-\frac{a}{4}\cot\theta_2\right)$$

$$n_2\text{分母}=\left(a-\frac{b}{4}(3\cos\gamma+\cot\theta_1\sin\gamma)-\frac{3a}{4}\right)\left(\frac{c}{4}(3\sin\beta-\cot\theta_2\cos\beta)-\frac{a}{4}\cot\theta_2\right)$$

$$-\left(\frac{c}{4}(3\cos\beta+\cot\theta_2\sin\beta)-\frac{a}{4}\right)\left(\frac{b}{4}(3\sin\gamma-\cot\theta_1\cos\gamma)-\frac{a}{4}\cot\theta_2\right)$$

以上を計算して係数ごとにまとめると表２～表４のとおりとなる。

係数	m_1 分子	n_1 分子
a^3	$-\frac{a^3}{4}\cot\theta_1$	$\frac{a^3}{4^2}(-3+\cot^2\theta_1)$
a^2b	$\frac{a^2b}{4^3}[(1+\cot^2\theta_1)(\sin\gamma-\cos\gamma\cot\theta_3)]$ $+8\cot\theta_1(\cos\gamma+\sin\gamma\cot\theta_3)$	$\frac{a^2b}{4^3}(7-\cot^2\theta_1)(\cos\gamma+\sin\gamma\cot\theta_3)$
a^2c	$\frac{a^2c}{4^3}(15-\cot^2\theta_1)(\sin\beta-\cos\beta\cot\theta_3)$	$\frac{a^2c}{4^3}(15-\cot^2\theta_1)(\cos\beta+\sin\beta\cot\theta_3)$
ab^2	$-\frac{ab^2}{4^3}\cot\theta_1(1+\cot^2\theta_3)$	$-\frac{ab^2}{4^3}(1+\cot^2\theta_3)$
ac^2	$\frac{ac^2}{4^3}\cot\theta_1(1+\cot^2\theta_3)$	$-\frac{3ac^2}{4^3}(1+\cot^2\theta_3)$
b^2c	$\frac{b^2c}{4^3}(1+\cot^2\theta_3)(\sin\beta-\cos\beta\cot\theta_3)$	$\frac{b^2c}{4^3}(1+\cot^2\theta_3)(\cos\beta+\sin\beta\cot\theta_3)$
bc^2	$-\frac{bc^2}{4^3}(1+\cot^2\theta_3)(\sin\gamma-\cos\gamma\cot\theta_3)$	$\frac{bc^2}{4^3}(1+\cot^2\theta_3)(\cos\gamma+\sin\gamma\cot\theta_3)$
abc	$-\frac{abc}{8}(\sin\beta-\cos\beta\cot\theta_3)(\cos\gamma+\sin\gamma\cot\theta_3)$	$-\frac{abc}{8}(\cos\beta+\sin\beta\cot\theta_3)(\cos\gamma+\sin\gamma\cot\theta_3)$

表２

係数	m_2 分子	n_2 分子
a^3	$-\frac{a^3}{4}\cot\theta_2$	$\frac{a^3}{4^2}(-3+\cot^2\theta_2)$
a^2b	$\frac{a^2b}{4^3}[(9+\cot^2\theta_2)(3\sin\gamma-\cos\beta\cot\theta_1)]$ $+8\cot\theta_2(3\cos\gamma+\sin\gamma\cot\theta_1)$	$\frac{a^2b}{4^3}(15-\cot^2\theta_2)(3\cos\gamma+\sin\gamma\cot\theta_1)$
a^2c	$\frac{a^2c}{4^3}(7-\cot^2\theta_2)(3\sin\beta-\cos\beta\cot\theta_2)$	$\frac{a^2c}{4^3}(7-\cot^2\theta_2)(3\cos\beta+\sin\beta\cot\theta_2)$
ab^2	$-\frac{ab^2}{4^3}\cot\theta_2(9+\cot^2\theta_1)$	$-\frac{3ab^2}{4^3}(9+\cot^2\theta_1)$
ac^2	$\frac{ac^2}{4^3}\cot\theta_2(9+\cot^2\theta_2)$	$-\frac{ac^2}{4^3}(9+\cot^2\theta_2)$
b^2c	$\frac{b^2c}{4^3}(9+\cot^2\theta_1)(3\sin\beta-\cos\beta\cot\theta_2)$	$\frac{b^2c}{4^3}(9+\cot^2\theta_1)(3\cos\beta+\sin\beta\cot\theta_2)$

bc^2	$-\frac{bc^2}{4^3}(9+cot^2\theta_3)(3\,sin\,\gamma - cos\,\gamma\,cot\,\theta_1)$	$\frac{bc^2}{4^3}(9+cot^2\theta_2)(3\,cos\,\gamma + sin\,\gamma\,cot\,\theta_1)$
abc	$-\frac{abc}{8}(3\,sin\,\beta - cos\,\beta\,cot\,\theta_2)(3\,cos\,\gamma + sin\,\gamma\,cot\,\theta_1)$	$-\frac{abc}{8}(3cos\,\beta + sin\,\beta\,cot\,\theta_2)(3\,cos\,\gamma + sin\,\gamma\,cot\,\theta_1)$

表３

係数	m_1 分母（n_1分母は符号をマイナスにしたもの）	m_2 分母（n_2分母は符号をマイナスにしたもの）
a^3	$\frac{a^2}{4}cot\,\theta_1$	$\frac{a^2}{4}cot\,\theta_2$
a^2b	$-\frac{ab}{16}[sin\,\gamma(1+cot\,\theta_1\,cot\,\theta_3) + cos\,\gamma\,(cot\,\theta_1 - cot\,\theta_3)]$	$-\frac{ab}{16}[sin\,\gamma(9+cot\,\theta_1\,cot\,\theta_2) - 3\,cos\,\gamma\,(cot\,\theta_1 - cot\,\theta_2)]$
a^2c	$-\frac{ac}{16}[sin\,\beta(3+cot\,\theta_1\,cot\,\theta_3) + cos\,\beta\,(cot\,\theta_1 - 3cot\,\theta_3)]$	$-\frac{ac}{16}[sin\,\beta(3+\ cot^2\,\theta_2) + 2\,cos\,\beta\,cot\,\theta_2]$
ab^2	$\frac{bc}{16}[sin(\beta+\gamma)\,(1-cot^2\theta_3) - 2\,cos(\beta+\gamma)\,cot\,\theta_3]$	$\frac{bc}{16}[sin(\beta+\gamma)\,(9-cot\,\theta_1\,cot\,\theta_2) - 3\,cos(\beta+\gamma)\,(cot\,\theta_1 + cot\,\theta_2)]$

表４

m_1，n_1，m_2，n_2 の分子について、$cot\,\theta_1$， $cot\,\theta_2$， $cot\,\theta_3$ を含む項と、含まない項（定数項）を分離する。
外心(1)及び(2)の点に正弦定理を適用すると、

$$\frac{\frac{a}{2}}{sin\,\theta_1} = 2\sqrt{\left(\frac{a+c\,cos\,\beta}{3} - \frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{c\,sin\,\beta}{3} - \frac{a}{4}cot\,\theta_1\right)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

$$\frac{\frac{a}{2}}{sin\,\theta_2} = 2\sqrt{\left(\frac{a+c\,cos\,\beta}{3} - \frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{c\,sin\,\beta}{3} - \frac{a}{4}cot\,\theta_2\right)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑩$$

⑨⑩より $cot\,\theta_1$， $cot\,\theta_2$ を求め、
関係式、$\theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi$ のとき、$cot\,\theta_1\,cot\,\theta_2 + cot\,\theta_2\,cot\,\theta_3 + cot\,\theta_3\,cot\,\theta_1 = 1$ より、$cot\,\theta_3$ を求めると、

$$cot\,\theta_1 = \frac{-a^2-b^2+5c^2}{12S},\quad cot\,\theta_2 = \frac{-a^2+5b^2-c^2}{12S},\quad cot\,\theta_3 = \frac{5a^2-b^2-c^2}{12S} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑪$$

が得られる。ここでＳは⊿ＡＢＣの面積で、ヘロンの公式を変形すると⑫が得られる。

$$S = \frac{\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}}{4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑫$$

⊿ＡＢＣに余弦定理を適用すると、

$$cos\,\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad cos\,\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\quad cos\,\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑬$$

⑪⑫⑬を用いて表２～表４の各式を変形、整理していく。

表２，表３において共通に現れる、次の８つの式を a，b，c で表す。

(1) $\cos\beta+\sin\beta\cot\theta_3$，(2) $\cos\gamma+\sin\gamma\cot\theta_3$，(3) $3\cos\beta+\sin\beta\cot\theta_2$，(4) $3\cos\gamma+\sin\gamma\cot\theta_1$

(5) $\sin\beta-\cos\beta\cot\theta_3$，(6) $\sin\gamma-\cos\gamma\cot\theta_3$，(7) $3\sin\beta-\cos\beta\cot\theta_2$，(8) $3\sin\gamma-\cos\gamma\cot\theta_1$

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha=\dfrac{1}{2}ac\sin\beta$ を用いて、

(1) $\cos\beta+\sin\beta\cot\theta_3=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\dfrac{\frac{1}{2}ac\sin\beta}{\frac{1}{2}ac}\cdot\dfrac{5a^2-b^2-c^2}{12S}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\dfrac{5a^2-b^2-c^2}{6ac}$

$=\dfrac{4a^2-2b^2+c^2}{3ac}$ 、同様に(2) $\cos\gamma+\sin\gamma\cot\theta_3$，(3) $3\cos\beta+\sin\beta\cot\theta_2$，(4) $3\cos\gamma+\sin\gamma\cot\theta_1$ を求めることができる。さらに、

(5)$\sin\beta-\cos\beta\cot\theta_3=\dfrac{\frac{1}{2}ac\sin\beta}{\frac{1}{2}ac}-\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\dfrac{5a^2-b^2-c^2}{12S}=\dfrac{48S^2-(a^2+c^2-b^2)(5a^2-b^2-c^2)}{2ac\cdot12S}$

$=\dfrac{48\dfrac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}{16}-(a^2+c^2-b^2)(5a^2-b^2-c^2)}{2ac\cdot12S}$

$=\dfrac{6a^2b^2+3b^2c^2+c^2a^2-4a^4-2b^4-c^4}{12acS}$ 、同じように(6)$\sin\gamma-\cos\gamma\cot\theta_3$，(7) $3\sin\beta-\cos\beta\cot\theta_2$

(8) $3\sin\gamma-\cos\gamma\cot\theta_1$ を求めることができる。以上をまとめる⑭⑮のとおりとなる。

$$\left.\begin{array}{l}
(1)\ \cos\beta+\sin\beta\cot\theta_3=\dfrac{4a^2-2b^2+c^2}{3ac},\quad (2)\ \cos\gamma+\sin\gamma\cot\theta_3=\dfrac{4a^2+b^2-2c^2}{3ab}\\
(3)\ 3\cos\beta+\sin\beta\cot\theta_2=\dfrac{4a^2-2b^2+4c^2}{3ac},\quad (4)\ 3\cos\gamma+\sin\gamma\cot\theta_1=\dfrac{4a^2+4b^2-2c^2}{3ab}
\end{array}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots⑭$$

$$\left.\begin{array}{l}
(5)\ \sin\beta-\cos\beta\cot\theta_3=\dfrac{6a^2b^2+3b^2c^2+c^2a^2-4a^4-2b^4-c^4}{12acS}\\
(6)\ \sin\gamma-\cos\gamma\cot\theta_3=\dfrac{a^2b^2+3b^2c^2+6c^2a^2-4a^4-b^4-2c^4}{12acS}\\
(7)\ 3\sin\beta-\cos\beta\cot\theta_2=\dfrac{3a^2b^2+3b^2c^2+5c^2a^2-2a^4-b^4-2c^4}{6acS}\\
(8)\ 3\sin\gamma-\cos\gamma\cot\theta_1=\dfrac{5a^2b^2+3b^2c^2+3c^2a^2-2a^4-2b^4-c^4}{6acS}
\end{array}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑮$$

⑭⑮を用いて、表２～表４の各項を定数項と、$\cot\theta_1$， $\cot\theta_2$， $\cot\theta_3$ を含む項に整理すると、表５～表７のようになる。

m_1 分子	
定数項	$\frac{2}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(-24a^6+5b^6-5c^6+56a^4b^2-44a^4c^2-32a^2b^4-43a^2c^4-22b^4c^2+22b^2c^4+87a^2b^2c^2)$
$cot^2\,\theta_1$の項	$\frac{3}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(a^2b^4-a^2c^4-5a^4b^2+5a^4c^2)\ cot^2\,\theta_1$
$cot^2\,\theta_2$の項	0
$cot^2\,\theta_3$の項	$\frac{3}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(-2b^6+2c^6-3a^4b^2+3a^4c^2+7a^2b^4-a^2c^4+4b^4c^2-4b^2c^4-6a^2b^2c^2)\ cot^2\,\theta_3$
m_2 分子	
定数項	$\frac{1}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(-48a^6+10b^6-10c^6+139a^4b^2+101a^4c^2-91a^2b^4-23a^2c^4+46b^4c^2-46b^2c^4-78a^2b^2c^2)$
$cot^2\,\theta_1$の項	$\frac{3}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(-2b^6-3a^4b^2+a^2b^4+6b^4c^2-4b^2c^4+11a^2b^2c^2)\ cot^2\,\theta_1$
$cot^2\,\theta_2$の項	$\frac{3}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(2c^6+4a^4b^2-a^4c^2-2a^2b^4-5a^2c^4+4b^4c^2-6b^2c^4-5a^2b^2c^2)\ cot^2\,\theta_2$
$cot^2\,\theta_3$の項	0

表５

n_1 分子	
定数項	$\frac{2}{2^6\cdot 3^2\cdot a}(14a^4+5b^4+5c^4-17a^2b^2-17b^2c^2+10c^2a^2)$
$cot^2\,\theta_1$の項	$\frac{3}{2^6\cdot 3^2\cdot a}(4a^4+a^2b^2+c^2a^2)\ cot^2\,\theta_1$
$cot^2\,\theta_2$の項	0
$cot^2\,\theta_3$の項	$\frac{3}{2^6\cdot 3^2\cdot a}(-2b^4-2c^4+a^2b^2+2b^2c^2-5c^2a^2)\ cot^2\,\theta_3$
n_2 分子	
定数項	$\frac{1}{2^6\cdot 3^2\cdot a}(28a^4+10b^4+10c^4-61a^2b^2+56b^2c^2-43c^2a^2)$
$cot^2\,\theta_1$の項	$\frac{3}{2^6\cdot 3^2\cdot a}(-2b^4-5a^2b^2+4b^2c^2)\ cot^2\,\theta_1$
$cot^2\,\theta_2$の項	$\frac{3}{2^6\cdot 3^2\cdot a}(4a^4-2c^4-2a^2b^2+4b^2c^2-c^2a^2)\ cot^2\,\theta_2$
$cot^2\,\theta_3$の項	0

表６

m_1 分母
$\dfrac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}(2a^4+2b^4+2c^4-5a^2b^2-5b^2c^2+4c^2a^2)$
m_2 分母
$\dfrac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}(2a^4+2b^4+2c^4-5a^2b^2+4b^2c^2-5c^2a^2)$
n_1 分母
$-\dfrac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}(2a^4+2b^4+2c^4-5a^2b^2-5b^2c^2+4c^2a^2)$
n_2 分母
$-\dfrac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}(2a^4+2b^4+2c^4-5a^2b^2+4b^2c^2-5c^2a^2)$

表７

最初に仮定した２つの円①②、

$x^2+y^2+m_1x+n_1y+l_1=0$，　$x^2+y^2+m_2x+n_2y+l_2=0$ が一致するためには、

$m_1=m_2$，$n_1=n_2$ であることをいえばよい。そのためには、

$\frac{m_1\text{分子}}{m_1\text{分母}}=\frac{m_2\text{分子}}{m_2\text{分母}}$，$\frac{n_1\text{分子}}{n_1\text{分母}}=\frac{n_2\text{分子}}{n_2\text{分母}}$ から、m_1分子$\times m_2$分母$=$ m_2分子$\times m_1$分母 及び

n_1分子$\times n_2$分母$=$ n_2分子$\times n_1$分母 が成り立てばよい。

m_1分子$\times m_2$分母$=$ m_2分子$\times m_1$分母 を式で表すと、表５～表７より、

$$\left[\frac{1}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(-48a^6+10b^6-10c^6+112a^4b^2-88a^4c^2-64a^2b^4-86a^2c^4-44b^4c^2+44b^2c^4+174a^2b^2c^2)\right.$$
$$+\frac{3}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(a^2b^4-a^2c^4-5a^4b^2+5a^4c^2)\ cot^2\,\theta_1$$
$$+\frac{3}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(-2b^6+2c^6-3a^4b^2+3a^4c^2+7a^2b^4-a^2c^4+4b^4c^2-4b^2c^4$$
$$\left.-6a^2b^2c^2)\ cot^2\,\theta_3\right]\times\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}(2a^4+2b^4+2c^4-5a^2b^2+4b^2c^2-5c^2a^2)$$

$$=\left[\frac{1}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(-48a^6+10b^6-10c^6+139a^4b^2+101a^4c^2-91a^2b^4-23a^2c^4+46b^4c^2-46b^2c^4\right.$$
$$-78a^2b^2c^2)+\frac{3}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(-2b^6-3a^4b^2+a^2b^4+6b^4c^2-4b^2c^4+11a^2b^2c^2)\ cot^2\,\theta_1$$
$$\left.+\frac{3}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(2c^6+4a^4b^2-a^4c^2-2a^2b^4-5a^2c^4+4b^4c^2-6b^2c^4-5a^2b^2c^2)\ cot^2\,\theta_2\right]$$
$$\times\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}(2a^4+2b^4+2c^4-5a^2b^2-5b^2c^2+4c^2a^2)\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑯$$

⑪より、$cot\,\theta_1 = \dfrac{-a^2-b^2+5c^2}{12S}$, $cot\,\theta_2 = \dfrac{-a^2+5b^2-c^2}{12S}$, $cot\,\theta_3 = \dfrac{5a^2-b^2-c^2}{12S}$ だから、

$$cot^2\,\theta_1 = \left(\frac{-a^2-b^2+5c^2}{12S}\right)^2, \quad cot^2\,\theta_2 = \left(\frac{-a^2+5b^2-c^2}{12S}\right)^2, \quad cot^2\,\theta_3 = \left(\frac{5a^2-b^2-c^2}{12S}\right)^2$$

これを⑯に入れて整理する。

定数項, $cot^2\,\theta_1$, $cot^2\,\theta_2$, $cot^2\,\theta_3$ の分母を共通にすると、分母は $2^{12}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^3$ と非常に大きな数となり、それに伴い、分子の次数及び係数も大きくなる。ただし、両辺が等しいことを証明すればよいので、次数及び係数が大きくなることはそれほど問題ではない。

m_1分子×m_2分母, m_2分子×m_1分母の係数を計算して、各項ごとにまとめると表８のとおりとなる。

項	m_1分子×m_2分母				m_2分子×m_1分母			
	定数項	$cot^2\,\theta_1$ の項	$cot^2\,\theta_3$ の項	合 計	定数項	$cot^2\,\theta_1$ の項	$cot^2\,\theta_2$ の項	合 計
a^{14}	864	0	0	864	864	0	0	864
b^{14}	−180	0	−12	−192	−180	−12	0	−192
c^{14}	180	0	12	192	180	0	12	192
$a^{12}b^2$	−5904	−30	−450	−6384	−6390	−18	24	−6384
$a^{12}c^2$	−2304	30	450	−1824	−1818	0	−6	−1824
$a^{10}b^4$	16272	21	2355	18648	18945	15	−312	18648
$a^{10}b^2c^2$	7452	360	−900	6912	6561	210	141	6912
$a^{10}c^4$	468	−381	−1455	−1368	−1314	0	−54	−1368
a^8b^6	−23364	87	−4263	−27540	−28953	39	1374	−27540
$a^8b^4c^2$	−2394	−525	−753	−3672	−2475	−342	−855	−3672
$a^8b^2c^4$	5040	−1167	3363	7236	7308	−660	588	7236
a^8c^6	414	1605	1653	3672	3816	0	−144	3672
a^6b^8	18810	−3	3237	22044	24399	−3	−2352	22044
$a^6b^6c^2$	−13230	−438	2028	−11640	−12906	−237	1503	−11640
$a^6b^4c^4$	−12636	2484	−1836	−11988	−12393	1848	−1443	−11988
$a^6b^2c^6$	−162	438	−2028	−1752	−2592	−132	972	−1752
a^6c^8	3762	−2481	−1401	−120	36	0	−156	−120
a^4b^{10}	−8460	−33	−1155	−9648	−11133	15	1470	−9648
$a^4b^8c^2$	15390	369	−1179	14580	14337	−42	285	14580
$a^4b^6c^4$	5112	−750	426	4788	6165	135	−1512	4788
$a^4b^4c^6$	−3924	−1554	474	−5004	−2223	−2298	−483	−5004
$a^4b^2c^8$	2916	783	729	4428	1944	2046	438	4428
a^4c^{10}	−4122	1185	705	−2232	−2178	0	−54	−2232

a^2b^{12}	1962	6	192	2160	2448	12	−300	2160
$a^2b^{10}c^2$	−6066	−48	282	−5832	−4041	−171	−1620	−5832
$a^2b^8c^4$	666	30	−48	648	−5814	591	5871	648
$a^2b^6c^6$	6264	288	−72	6480	10962	165	−4647	6480
$a^2b^4c^8$	−3366	114	12	−3240	−2880	−1863	1503	−3240
$a^2b^2c^{10}$	−198	−240	−210	−648	−1089	690	−249	−648
a^2c^{12}	738	−150	−156	432	414	0	18	432
$b^{12}c^2$	792	0	−24	768	−18	186	600	768
$b^{10}c^4$	−432	0	0	−432	3294	−1086	−2640	−432
b^8c^6	−1404	0	12	−1392	−8532	3006	4134	−1392
b^6c^8	1404	0	−12	1392	8532	−4134	−3006	1392
b^4c^{10}	432	0	0	432	−3294	2640	1086	432
b^2c^{12}	−792	0	24	−768	18	−600	−186	−768
合 計	0	0	0	0	0	0	0	0

表８

m_1分子×m_2分母，m_2分子×m_1分母の「定数項」「$cot^2\,\theta_1$」「$cot^2\,\theta_2$」「$cot^2\,\theta_3$」それぞれの係数は異なっているが、その合計は完全に一致し$m_1 = m_2$が確認された。

同様に、n_1分子×n_2分母，n_2分子×n_1分母を計算してまとめると表９のとおりとなり、これも各項の合計は完全に一致し、$n_1 = n_2$が確認された。

項	n_1分子×n_2分母				n_2分子×n_1分母			
	定数項	$cot^2\,\theta_1$の項	$cot^2\,\theta_3$の項	合 計	定数項	$cot^2\,\theta_1$の項	$cot^2\,\theta_2$の項	合 計
a^{12}	−504	24	0	−480	−504	0	24	−480
b^{12}	−180	0	−12	−192	−180	−12	0	−192
c^{12}	−180	0	−12	−192	−180	0	−12	−192
$a^{10}b^2$	2880	−6	150	3024	3366	−30	−312	3024
$a^{10}c^2$	1908	−294	−750	864	774	0	90	864
a^8b^4	−6462	−75	−735	−7272	−8649	3	1374	−7272
a^8c^4	−2088	1149	1875	936	828	0	108	936
$a^8b^2c^2$	−5562	210	2040	−3312	−2727	264	−849	−3312
a^6b^6	7362	−30	1176	8508	10764	96	−2352	8508
a^6c^6	558	−1434	−660	−1536	−1548	0	12	−1536
$a^6b^4c^2$	3420	450	−918	2952	1071	−411	2292	2952
$a^6b^2c^4$	504	−954	−2754	−3204	−2331	−372	−501	−3204
a^4b^8	−4518	21	−687	−5184	−6705	51	1470	−5184

a^4c^8	−144	165	−237	−216	−144	0	−72	−216
$a^4b^6c^2$	1962	−96	−462	1404	3339	−630	−1305	1404
$a^4b^2c^6$	990	192	438	1620	2205	−1056	471	1620
$a^4b^4c^4$	3726	−90	900	4536	2997	1989	−450	4536
a^2b^{10}	1422	6	156	1584	1908	−24	−300	1584
a^2c^{10}	450	150	120	720	774	0	−54	720
$a^2b^8c^2$	−2484	−42	294	−2232	−1431	219	−1020	−2232
$a^2b^2c^8$	−1512	390	186	−936	−1755	210	609	−936
$a^2b^6c^4$	−1926	−12	66	−1872	−4437	−576	3141	−1872
$a^2b^4c^6$	18	276	−6	288	2205	363	−2280	288
$b^{10}c^2$	612	0	−36	576	−198	174	600	576
b^8c^4	180	0	−36	144	3096	−912	−2040	144
b^6c^6	−1224	0	−24	−1248	−5436	2094	2094	−1248
b^4c^8	180	0	−36	144	3096	−2040	−912	144
b^2c^{10}	612	0	−36	576	−198	600	174	576
合 計	0	0	0	0	0	0	0	0

表９

実際の計算は、 m_1分子 $\times$ m_2分母, m_2分子 $\times$ m_1分母 の場合が、

$(a,b,c$ の６次式$)\times(a,b,c$ の 4 次式$)\times(a,b,c$ の 4 次式$)=(a,b,c$ の 14 次式$)$ 、

n_1分子 $\times$ n_2分母, n_2分子 $\times$ n_1分母 の場合が、

$(a,b,c$ の 4 次式$)\times(a,b,c$ の 4 次式$)\times(a,b,c$ の 4 次式$)=(a,b,c$ の 12 次式$)$ であり、筆算では困難。エクセルのプログラムを作り、試行錯誤を繰り返しながら上記係数を計算した。

この結果にたどり着くまでには相当複雑な計算を行う必要があり、各項係数の合計が完全に一致したのを確認した時は感動ものだった。

２つの円が一致することを証明できたので、次に円の中心と半径を求める。

表５より、m_1 分子について $cot^2\theta_1$ ～ $cot^2\theta_3$ を⑪により a, b, c に置きかえていく。

定数項

$$\frac{2}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(-24a^6+5b^6-5c^6+56a^4b^2-44a^4c^2-32a^2b^4-43a^2c^4-22b^4c^2+22b^2c^4+87a^2b^2c^2)$$

$cot^2\theta_1$の項

$$\frac{3}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(a^2b^4-a^2c^4-5a^4b^2+5a^4c^2)\ cot^2\theta_1$$

$$=\frac{3}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(a^2b^4-a^2c^4-5a^4b^2+5a^4c^2)\left(\frac{-a^2-b^2+5c^2}{12S}\right)^2$$

$$=\frac{3(a^2b^4-a^2c^4-5a^4b^2+5a^4c^2)(-a^2-b^2+5c^2)^2}{2^{12}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^3}$$

$cot^2\,\theta_3$の項

$$\frac{3}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(-2b^6+2c^6-3a^4b^2+3a^4c^2+7a^2b^4-a^2c^4+4b^4c^2-4b^2c^4-6a^2b^2c^2)\ cot^2\,\theta_3$$

$$\frac{3}{2^8\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(-2b^6+2c^6-3a^4b^2+3a^4c^2+7a^2b^4-a^2c^4+4b^4c^2-4b^2c^4-6a^2b^2c^2)\left(\frac{5a^2-b^2-c^2}{12S}\right)^2$$

$$=\frac{3(-2b^6+2c^6-3a^4b^2+3a^4c^2+7a^2b^4-a^2c^4+4b^4c^2-4b^2c^4-6a^2b^2c^2)(5a^2-b^2-c^2)^2}{2^{12}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^3}$$

定数項， $cot^2\,\theta_1$の項， $cot^2\,\theta_3$の項を加え、分母を($2^{12}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^3$) で共通にすると次のようになる。

$$\frac{2(-24a^6+5b^6-5c^6+56a^4b^2-44a^4c^2-32a^2b^4-43a^2c^4-22b^4c^2+22b^2c^4+87a^2b^2c^2)\cdot 9[2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)]}{2^{12}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^2}$$

$$+\frac{3(a^2b^4-a^2c^4-5a^4b^2+5a^4c^2)(-a^2-b^2+5c^2)^2}{2^{12}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^3}$$

$$+\frac{3(-2b^6+2c^6-3a^4b^2+3a^4c^2+7a^2b^4-a^2c^4+4b^4c^2-4b^2c^4-6a^2b^2c^2)(5a^2-b^2-c^2)^2}{2^{12}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^3}$$

$$\begin{aligned}m_1\text{ 分子}=\frac{12}{2^{12}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^3}\big(&36a^{10}-8b^{10}+8c^{10}-176a^8b^2+14a^8c^2+301a^6b^4-58a^6c^4-189a^6b^2c^2-219a^4b^6\\&-6a^4c^6+465a^4b^4c^2-168a^4b^2c^4+70a^2b^8+38a^2c^8-283a^2b^6c^2+378a^2b^4c^4-203a^2b^2c^6\\&+48b^8c^2-106b^6c^4+106b^4c^6-48b^2c^8\big)\end{aligned}$$

………………⑰

⑱は非常に複雑な式であるが次のように因数分解できる。

$$\begin{aligned}\frac{12}{2^{12}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^3}&\left(2a^2-b^2+2c^2\right)\left(a^2-2b^2+c^2\right)\big(18a^6-4b^6+4c^6-43a^4b^2-29a^4c^2+25a^2b^4+11a^2c^4+14b^4c^2\\&-14b^2c^4-36a^2b^2c^2\big)\end{aligned}$$

表 7 より、m_1 分母について、

$$\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}(2a^4+2b^4+2c^4-5a^2b^2-5b^2c^2+4c^2a^2)=\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}(2a^2-b^2+2c^2)(a^2-2b^2+c^2)$$

よって、分母・分子に共通な$(2a^2-b^2+2c^2)(a^2-2b^2+c^2)$で割って、

$$m_1=\frac{1}{2^5\cdot 3^2\cdot a\cdot S^2}\left(18a^6-4b^6+4c^6-43a^4b^2-29a^4c^2+25a^2b^4+11a^2c^4+14b^4c^2-14b^2c^4-36a^2b^2c^2\right)$$

………………⑱

次に表 6 より、n_1 分子について、

定数項

$$\frac{2}{2^6\cdot 3^2\cdot a}(14a^4+5b^4+5c^4-17a^2b^2-17b^2c^2+10c^2a^2)$$

$cot^2\,\theta_1$の項

$$\frac{3}{2^6\cdot 3^2\cdot a}(4a^4+a^2b^2+c^2a^2)\ cot^2\,\theta_1$$

$$=\frac{3}{2^6\cdot 3^2\cdot a}(4a^4+a^2b^2+c^2a^2)\left(\frac{-a^2-b^2+5c^2}{12S}\right)^2=\frac{3(4a^4+a^2b^2+c^2a^2)(-a^2-b^2+5c^2)^2}{2^{10}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^2}$$

$cot^2\,\theta_3$の項

$$\frac{3}{2^6\cdot 3^2\cdot a}(-2b^4-2c^4+a^2b^2+2b^2c^2-5c^2a^2)\ cot^2\,\theta_3$$

$$\frac{3}{2^6\cdot 3^2\cdot a}(-2b^4-2c^4+a^2b^2+2b^2c^2-5c^2a^2)\left(\frac{5a^2-b^2-c^2}{12S}\right)^2$$
$$=\frac{3(-2b^4-2c^4+a^2b^2+2b^2c^2-5c^2a^2)(5a^2-b^2-c^2)^2}{2^{10}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^2}$$

定数項，$cot^2\,\theta_1$の項，$cot^2\,\theta_1$の項を加え、分母を$(\,2^{10}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^2)$で共通にすると、

$$\frac{2(14a^4+5b^4+5c^4-17a^2b^2-17b^2c^2+10c^2a^2)\cdot 9[2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)]}{2^{10}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^2}$$
$$+\frac{3(4a^4+a^2b^2+c^2a^2)(-a^2-b^2+5c^2)^2}{2^{10}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^2}$$
$$+\frac{3(-2b^4-2c^4+a^2b^2+2b^2c^2-5c^2a^2)(5a^2-b^2-c^2)^2}{2^{10}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^3}$$

$$n_1\text{ 分子}=\frac{12}{2^{10}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^2}\big(-20a^8-8b^8-8c^8+76a^6b^2-14a^6c^2-93a^4b^4+24a^4c^4+57a^4b^2c^2+46a^2b^6$$
$$+10a^2c^6-105a^2b^4c^2+21a^2b^2c^4+40b^6c^2-66b^4c^4+40b^2c^6\big)$$

上式は次のように因数分解できる。

$$=-\frac{12}{2^{10}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^2}(2a^2-b^2+2c^2)(a^2-2b^2+c^2)(10a^4+4b^4+4c^4-13a^2b^2-10b^2c^2-13c^2a^2)\quad\cdots\cdots⑲$$

表 7 より、n_1 分母について、

$$-\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}(2a^4+2b^4+2c^4-5a^2b^2-5b^2c^2+4c^2a^2)=-\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}(2a^2-b^2+2c^2)(a^2-2b^2+c^2)$$

よって、分母・分子に共通な$(2a^2-b^2+2c^2)(a^2-2b^2+c^2)$で割って、

$$n_1=\frac{1}{2^3\cdot 3^2\cdot a\cdot S}\big(10a^4+4b^4+4c^4-13a^2b^2-10b^2c^2-13c^2a^2\big)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑳$$

m_2，n_2 についても同様に、

$$m_2\text{ 分子}=\frac{12}{2^{12}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^3}\big(36a^{10}-8b^{10}+8c^{10}-176a^8b^2-148a^8c^2+301a^6b^4+203a^6c^4+360a^6b^2c^2$$
$$-219a^4b^6-105a^4c^6-147a^4b^4c^2-105a^4b^2c^4+70a^2b^8+2a^2c^8-22a^2b^6c^2-72a^2b^4c^4$$
$$+22a^2b^2c^6+12b^8c^2+20b^6c^4-20b^4c^6-12b^2c^8\big)$$
$$=\frac{12}{2^{10}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^3}\big(18a^6-4b^6+4c^6-43a^4b^2-29a^4c^2+25a^2b^4+11a^2c^4+14b^4c^2-14b^2c^4$$
$$-36a^2b^2c^2\big)\big(2a^2-b^2-c^2\big)\big(a^2-2b^2-2c^2\big)$$

$$m_2\text{ 分母}=\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}\big(2a^4+2b^4+2c^4-5a^2b^2+4b^2c^2-5c^2a^2\big)=\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}\big(2a^2-b^2-c^2\big)\big(a^2-2b^2-2c^2\big)$$

分母、分子に共通の$(2a^2-b^2-c^2)(a^2-2b^2-2c^2)$で割って、

$$m_2=\frac{1}{2^5\cdot 3^2\cdot a\cdot S^2}\left(18a^6-4b^6+4c^6-43a^4b^2-29a^4c^2+25a^2b^4+11a^2c^4+14b^4c^2-14b^2c^4-36a^2b^2c^2\right)$$

…………………㉑

㉑は⑱と完全に一致する。

$$n_2\text{ 分子}=-\frac{12}{2^{10}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^2}\left(-20a^8-8b^8-8c^8+76a^6b^2+76a^6c^2-93a^4b^4-93a^4c^4-150a^4b^2c^2+46a^2b^6\right.$$
$$\left.+46a^2c^6+48a^2b^4c^2+48a^2b^2c^4+4b^6c^2+24b^4c^4+4b^2c^6\right)$$
$$=-\frac{12}{2^{10}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^2}\left(2a^2-b^2-c^2\right)\left(a^2-2b^2-2c^2\right)\left(10a^4+4b^4+4c^4-13a^2b^2-10b^2c^2-13c^2a^2\right)$$

$$n_2\text{ 分母}=\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}\left(2a^4+2b^4+2c^4-5a^2b^2+4b^2c^2-5c^2a^2\right)=\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}\left(2a^2-b^2-c^2\right)\left(a^2-2b^2-2c^2\right)$$

分母、分子に共通の$(2a^2-b^2-c^2)(a^2-2b^2-2c^2)$で割って、

$$n_2=\frac{1}{2^3\cdot 3^2\cdot a\cdot S}\left(10a^4+4b^4+4c^4-13a^2b^2-10b^2c^2-13c^2a^2\right)$$

…………………㉒

㉒は⑳と完全に一致する。以上を整理すると表１０のようになる。

		共通因子
m_1 分子	$\frac{12}{2^{12}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^3}(2a^2-b^2+2c^2)(a^2-2b^2+c^2)(18a^6-4b^6+4c^6-43a^4b^2-29a^4c^2+25a^2b^4+11a^2c^4+14b^4c^2-14b^2c^4-36a^2b^2c^2)$	$(2a^2-b^2+2c^2)$ $(a^2-2b^2+c^2)$
m_1 分母	$\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}(2a^2-b^2+2c^2)(a^2-2b^2+c^2)$	
n_1 分子	$-\frac{12}{2^{10}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^2}(2a^2-b^2+2c^2)(a^2-2b^2+c^2)(10a^4+4b^4+4c^4-13a^2b^2-10b^2c^2-13c^2a^2)$	
n_1 分母	$-\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}(2a^2-b^2+2c^2)(a^2-2b^2+c^2)$	
m_2 分子	$\frac{12}{2^{10}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^3}\left(18a^6-4b^6+4c^6-43a^4b^2-29a^4c^2+25a^2b^4+11a^2c^4+14b^4c^2-14b^2c^4-36a^2b^2c^2\right)\left(2a^2-b^2-c^2\right)\left(a^2-2b^2-2c^2\right)$	$(2a^2-b^2-c^2)$ $(a^2-2b^2-2c^2)$
m_2 分母	$\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}(2a^2-b^2-c^2)(a^2-2b^2-2c^2)$	
n_2 分子	$-\frac{12}{2^{10}\cdot 3^4\cdot a\cdot S^2}(2a^2-b^2-c^2)(a^2-2b^2-2c^2)(10a^4+4b^4+4c^4-13a^2b^2-10b^2c^2-13c^2a^2)$	
n_2 分母	$\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot S}(2a^2-b^2-c^2)(a^2-2b^2-2c^2)$	

表１０

m_1，n_1 と m_2，n_2 のそれぞれにおいて、非常に似通った $(2a^2-b^2+2c^2)(a^2-2b^2+c^2)$ 及び $(2a^2-b^2-c^2)(a^2-2b^2-2c^2)$ という共通因子があり、その共通因子で分母・分子を割ることにより分母が消去され、直接 $m_1=m_2$，$n_1=n_2$ を確認することができた。

次にヴァン・ラモン円の半径 (R_V) を求める。

$$x^2+y^2+mx+ny+l=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots㉓$$

において l を求れば、$R_V=\sqrt{\left(\frac{m_1}{2}\right)^2+\left(\frac{n_1}{2}\right)^2-l_1}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots㉔$

㉔により半径が求められる。㉓に⑱⑳を入れて、

$$x^2+y^2+\frac{1}{2^5\cdot 3^2\cdot a\cdot S^2}\left(18a^6-4b^6+4c^6-43a^4b^2-29a^4c^2+25a^2b^4+11a^2c^4+14b^4c^2-14b^2c^4\right.$$
$$\left.-36a^2b^2c^2\right)x+\frac{1}{2^3\cdot 3^2\cdot a\cdot S}\left(10a^4+4b^4+4c^4-13a^2b^2-10b^2c^2-13c^2a^2\right)y+l=0$$

上式で示される円は、表１のすべての点を通るので、点(1) $\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\cot\theta_1\right)$ を代入して、

$$\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\cot\theta_1\right)^2+\frac{1}{2^5\cdot 3^2\cdot a\cdot S^2}(18a^6-4b^6+4c^6-43a^4b^2-29a^4c^2+25a^2b^4+11a^2c^4+14b^4c^2$$
$$-14b^2c^4-36a^2b^2c^2)\left(\frac{a}{4}\right)+\frac{1}{2^3\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(10a^4+4b^4+4c^4-13a^2b^2-10b^2c^2-13c^2a^2)\left(\frac{a}{4}\cot\theta_1\right)+l=0$$

$\cot\theta_1=\dfrac{-a^2-b^2+5c^2}{12S}$ を入れて整理すると、

$$l=-\frac{1}{2^6\cdot 3^3\cdot S^2}(16a^6-8b^6+16c^6-48a^4b^2-6a^4c^2+36a^2b^4-6a^2c^4+36b^4c^2-48b^2c^4-69a^2b^2c^2)$$
$$=-\frac{1}{2^6\cdot 3^3\cdot S^2}(2a^2-b^2+2c^2)(8a^4+8b^4+8c^4-20a^2b^2-20b^2c^2-11c^2a^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots㉕$$

㉔の両辺を２乗して⑱⑳㉕を入れると、

$$R_V{}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[\frac{1}{2^5\cdot 3^2\cdot a\cdot S^2}(18a^6-4b^6+4c^6-43a^4b^2-29a^4c^2+25a^2b^4+11a^2c^4+14b^4c^2-14b^2c^4-36a^2b^2c^2)\right]^2$$
$$+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[\frac{1}{2^3\cdot 3^2\cdot a\cdot S}(10a^4+4b^4+4c^4-13a^2b^2-10b^2c^2-13c^2a^2)\right]^2$$
$$+\frac{1}{2^6\cdot 3^3\cdot S^2}\left(2a^2-b^2+2c^2\right)\left(8a^4+8b^4+8c^4-20a^2b^2-20b^2c^2-11c^2a^2\right)$$

整理して、

$$R_V{}^2=\left(\frac{1}{2^5\cdot 3^2\cdot S^2}\right)^2(8a^{10}+8b^{10}+8c^{10}-326a^8b^2-32a^8c^2+26a^6b^4+26a^6c^4+34a^6b^2c^2+26a^4b^6$$
$$+26a^4c^6+51a^4b^4c^2+51a^4b^2c^4-32a^2b^8-32a^2c^8+34a^2b^6c^2+51a^2b^4c^4+34a^2b^2c^6$$
$$-32b^8c^2+26b^6c^4+26b^4c^6-32b^2c^8)$$

上式は次のような整った式に因数分解できる。

$$R_V{}^2=\left(\frac{1}{2^5\cdot 3^2\cdot S^2}\right)^2(2a^4+2b^4+2c^4-5a^2b^2-5b^2c^2-5c^2a^2)(a^2-2b^2-2c^2)(2a^2+2b^2-c^2)(2a^2-b^2+2c^2)$$

以上より、

$$R_V=\left(\frac{1}{2^5\cdot 3^2\cdot S^2}\right)\sqrt{(2a^4+2b^4+2c^4-5a^2b^2-5b^2c^2-5c^2a^2)(a^2-2b^2-2c^2)(2a^2+2b^2-c^2)(2a^2-b^2+2c^2)}$$

⊿ＡＢＣの外接円の半径をRとすると、$S=\dfrac{abc}{4R}$だから、

$$R_V=\frac{1}{18a^2b^2c^2}\sqrt{(2a^4+2b^4+2c^4-5a^2b^2-5b^2c^2-5c^2a^2)(a^2-2b^2-2c^2)(2a^2+2b^2-c^2)(2a^2-b^2+2c^2)}\,R^2$$

……………㉖

ヴァン・ラモン円の半径が、外接円の半径と関係付けて導かれた。

ヴァン・ラモン円の中心は、アメリカ人数学者 Clark Kimberling（クラーク・キンバーリング）が提示した、三角形の中心とその特性のリスト「キンバーリング数」の一つで、Ｘ：１１５３の番号が付されている。Wolfram Mathworld にヴァン・ラモン円の半径が次のように記されている。

$$R_V=\frac{1}{18\,a^2\,b^2\,c^2}\sqrt{\underline{\underline{\left(\left(a^2-2\,b^2-c^2\right)\right.}}\left(2\,a^2+2\,b^2-c^2\right)\left(2\,a^2-b^2+2\,c^2\right)\left(2\,a^4-5\,a^2\,b^2+2\,b^4-\underline{\underline{5\,a^2\,c^2}}-5\,a^2\,c^2+2\,c^4\right)\Big)}\,R^2.$$

……………㉗

実は㉗には２ヶ所誤りがある。

１点は、$(a^2-2b^2-\boldsymbol{c^2})$ については $(a^2-2b^2-\boldsymbol{2c^2})$ が正。

$(2a^2+2b^2-c^2)(2a^2-b^2+2c^2)$ なら、$(a^2-2b^2-2c^2)$ でなければ整合しない。符号を合わせればー$(-a^2+2b^2+2c^2)$である。もう１点、$(2a^4-5a^2b^2+2b^4-\boldsymbol{5a^2c^2}-5a^2c^2+2c^4)$ は $(2a^4-5a^2b^2+2b^4-\boldsymbol{5b^2c^2}-5a^2c^2+2c^4)$ が正、これはケアレスミスと思われる。

三角形の垂心によって分割される、６つの三角形の外接円の中心についても、図４に示すとおり、同様に同一円周上に並ぶ。

垂心は、３つの頂点から各対辺に引いた垂線の交点である。垂心によって分けられた６つの三角形は、すべて直角三角形だから、それぞれの三角形の外心は三角形の最大の辺の二等分点上にある。

最大の辺は、それぞれ隣接する２つの三角形に共通であるから、６つある外心は２つずつ共通であり、結局外接円の中心は見かけ上３点となる。３点から１つの円が決まるので、それらは同一円周上にあることがわかる。

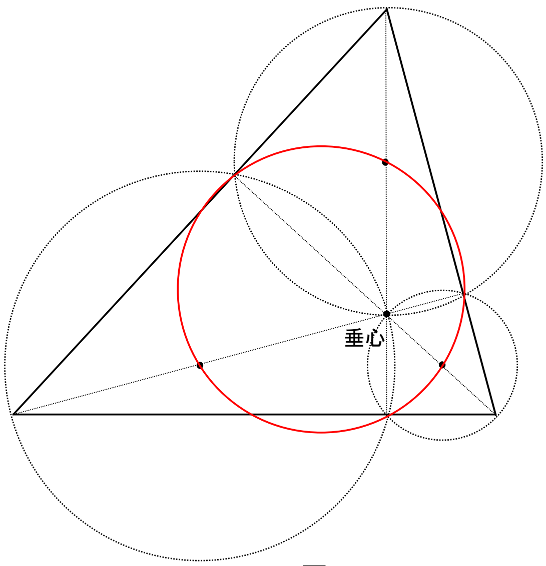


図４

一例として、図５のように、
$a=10$，$\alpha=60^\circ$，$\beta=45^\circ$，$\gamma=75^\circ$ の三角形の場合、（この時、$b=8.165$，$c=11.154$）で計算すると、外接円の半径 $R=5.774$ に対し、ヴァン・ラモン円の半径 $R_V=2.944$，三角形の点Ｂを原点とした時の重心座標 $(5.962,\ 2.629)$ に対し、ヴァン・ラモン円の中心座標は $(5.432,\ 2.670)$、重心との距離 0.532 の位置にある。

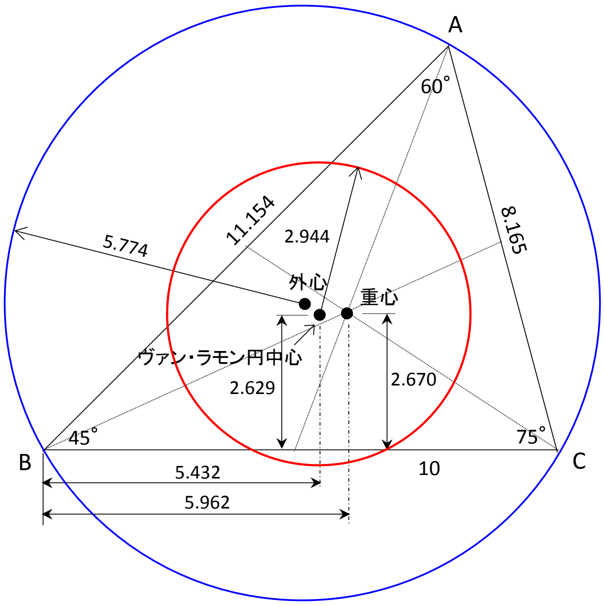


図５

最初の方針に沿って平面座標を使い、三角関数と代数的計算により証明することができたが、計算過程は非常に複雑かつ難解で挫けそうになった。

計算途中で現れた、３辺の間に存在する次のような絶妙なバランスの式 $(2a^2-b^2+2c^2)(a^2-2b^2+c^2)(2a^2-b^2-c^2)(a^2-2b^2-2c^2)$ の存在や、何よりヴァン・ラモン円の半径が、均整の取れた美しい式で与えられることを知り喜びを感じた。（２０２１．０７．１５）