１１３「数学オリンピック２０世紀最難問」

１９９６年インド大会の第５問。２０世紀の数学オリンピック問題の中で最も平均点が低い問題に挑戦してみた。

問題

凸六角形 $ABCDEF$ において，$AB//DE$，$BC//EF$，$CD//FA$ とする。また，三角形 FAB，BCD，DEF の外接円の半径を R_A，R_C，R_E とおく。また，六角形の周の長さを P とおく。

このとき $R_A+R_C+R_E \geq \dfrac{P}{2}$ を証明せよ。

解 答

それほど難しそうな問題には見えなかったが、実際にやってみるとやはりかなりの難問だった。少し計算していくと、下図（図１）において、$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=\pi(180^\circ)$ の条件で、

$$a\left(\frac{1}{\sin\alpha_1}-2\right)+b\left(\frac{1}{\sin\alpha_2}-2\right)+c\left(\frac{1}{\sin\beta_1}-2\right)+d\left(\frac{1}{\sin\beta_2}-2\right)+e\left(\frac{1}{\sin\gamma_1}-2\right)+f\left(\frac{1}{\sin\gamma_2}-2\right)\geq 0$$

を証明すればよいことが導かれる。

これから、$\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=\gamma_1=\gamma_2=30^\circ$ のとき、$\sin\alpha_1=\sin\alpha_2=\cdots\cdots,\ =\sin\gamma_2=\frac{1}{2}$ で、左辺の各項がすべて０になり、等号が成り立つことが分かる。しかし、α_1，α_2，$\beta_1\cdots\cdots$，γ_2 が30° 以外の時、左辺>０であると思われるが、変数の数とその自由度が多すぎて証明することができない。

難しいのは一定の制約はあるが、a，b，$c\cdots\cdots$，f がいろいろな値を取り得るということである。

以下、さまざまな試行錯誤の結果たどり着いた解答を記す。

（解 答）

図１に示す凸六角形ＡＢＣＤＥＦにおいて、各辺の長さをa，b，c，d，e，f

ＢＦ＝l，ＤＢ＝m，ＦＤ＝n，∠ＦＡＢ＝α，∠ＢＣＤ＝β，∠ＤＥＦ＝γ、

∠ＡＦＢ＝α_1，∠ＡＢＦ＝α_2

∠ＣＢＤ＝β_1，∠ＣＤＢ＝β_2，

∠ＥＤＦ＝γ_1，∠ＥＦＤ＝γ_2 とする。

α，β，γ の対角は、

∠ＣＤＥ＝α，∠ＥＦＡ＝β，∠ＡＢＣ＝γ

であり、六角形の内角の和$=4\pi(720^\circ)$ だから$2(\alpha+\beta+\gamma)=4\pi$ より $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$、

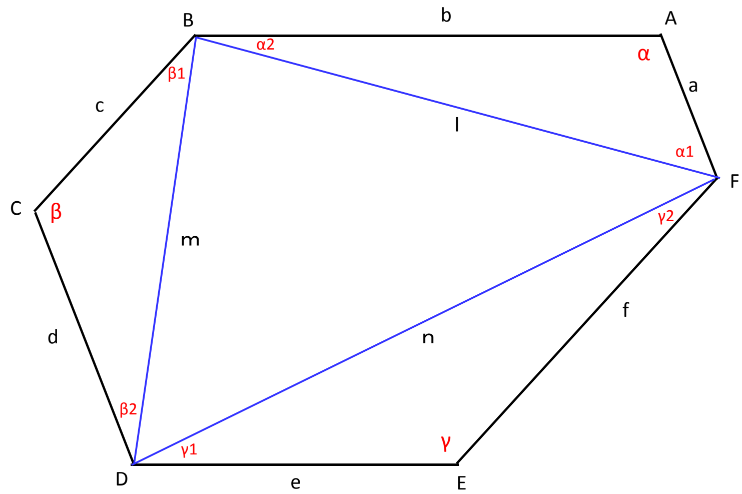


図１

また、$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = \beta + \beta_1 + \beta_2 = \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = \pi$ から、$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = \pi$ である。

⊿ＡＦＢ，⊿ＣＢＤ，⊿ＥＤＦに正弦定理を適用し、それぞれの外接円の半径を R_A，R_B，R_C とすると

$$\frac{l}{\sin\alpha} = 2R_A,\quad \frac{m}{\sin\beta} = 2R_B,\quad \frac{n}{\sin\gamma} = 2R_C \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

図１に $l\sin\alpha_1 = GB$，$l\sin\alpha_2 = LF$，$m\sin\beta_1 = ID$，$m\sin\beta_2 = HB$，$n\sin\gamma_1 = KF$，$n\sin\gamma_2 = JD$ を書きこむと、図２のようになる。題意より、六角形の対向する辺は平行であるから、$l\sin\alpha_1$ と $m\sin\beta_2$，$m\sin\beta_1$ と $n\sin\gamma_2$，$l\sin\alpha_2$ と $n\sin\gamma_1$ はそれぞれ同一直線上にある。

図２から明らかなように、

$$\left.\begin{aligned} m\sin\beta_1 + n\sin\gamma_2 &< l \\ l\sin\alpha_2 + n\sin\gamma_1 &< m \\ m\sin\beta_2 + l\sin\alpha_1 &< n \end{aligned}\right\rbrack \cdots\cdots\cdots ②$$

$m\sin\beta_1 = d\sin(\beta_1 + \beta_2)$

$= d\sin(\pi - \beta) = d\sin\beta$　同様に、

$n\sin\gamma_2 = e\ \sin\gamma$，　$l\sin\alpha_2 = a\sin\alpha$

$n\sin\gamma_1 = f\ \sin\gamma$，　$m\sin\beta_2 = c\sin\beta$

$l\sin\alpha_1 = b\ \sin\alpha$

以上を②に入れると、

$$\left.\begin{aligned} d\sin\beta + e\sin\gamma &< l \\ a\sin\alpha + f\sin\gamma &< m \\ c\sin\beta + b\sin\alpha &< n \end{aligned}\right\rbrack \cdots\cdots\cdots ③$$

さらに、

$m\sin\beta_1 + n\sin\gamma_2 = a\sin\beta + b\sin\gamma$

$l\sin\alpha_2 + n\sin\gamma_1 = c\sin\gamma + d\sin\alpha$

$m\sin\beta_2 + l\sin\alpha_1 = e\sin\alpha + f\sin\beta$

であるから、次式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} a\sin\beta + b\sin\gamma &< l \\ c\sin\gamma + d\sin\alpha &< m \\ e\sin\alpha + f\sin\beta &< n \end{aligned}\right\rbrack \cdots\cdots\cdots ④$$

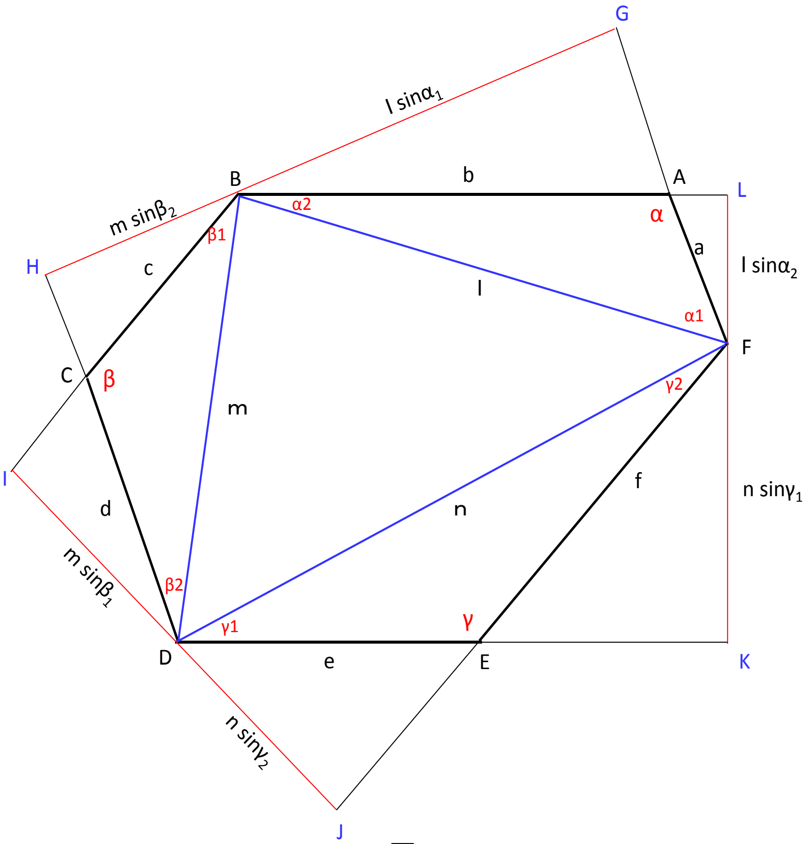


図２

③④の両辺を加え、①と組み合わせると次のようになる。

$d\sin\beta + e\sin\gamma + a\sin\beta + b\sin\gamma < 2l\ = 4R_A\sin\alpha$

$a\sin\alpha + f\sin\gamma + c\sin\gamma + d\sin\alpha < 2m = 4R_B\sin\beta$

$c\sin\beta + b\sin\alpha + e\sin\alpha + f\sin\beta < 2n\ = 4R_C\sin\gamma$

整理して、

$$2R_A > \frac{(a+d)\sin\beta + (b+e)\sin\gamma}{2\sin\alpha},\quad 2R_B > \frac{(c+f)\sin\gamma + (a+d)\sin\alpha}{2\sin\beta},$$

$$2R_C > \frac{(b+e)\sin\alpha + (c+f)\sin\beta}{2\sin\gamma}$$　この３式の右辺，左辺を全て加えると次式が導かれる。

$$2(R_A+R_B+R_C)>\frac{(a+d)\sin\beta+(b+e)\sin\gamma}{2\sin\alpha}+\frac{(c+f)\sin\gamma+(a+d)\sin\alpha}{2\sin\beta}+\frac{(b+e)\sin\alpha+(c+f)\sin\beta}{2\sin\gamma}$$

$$=\frac{a+d}{2}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)+\frac{b+e}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)+\frac{c+f}{2}\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤は、$\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$ のとき（　）内がすべて 2 となり、
$2(R_A+R_B+R_C)>a+b+c+d+e+f$ が得られる。

$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ だから、$\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$ を満たす α，β，γ は、$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{2\pi}{3}(120^\circ)$である。

この問題を証明するためには、α，β，γ の取り得るすべての値について、
$2(R_A+R_B+R_C)>a+b+c+d+e+f$ が成り立つことをいわなくてはならない。
⑤の（　）内の値の変化を調べるため、次式 $f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ を考える。

$$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)+\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)+\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$

$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ より、$\gamma=2\pi-(\alpha+\beta)$ を⑥に入れると、

$$\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)+\left(\frac{\sin\alpha}{\sin[2\pi-(\alpha+\beta)]}+\frac{\sin[2\pi-(\alpha+\beta)]}{\sin\alpha}\right)+\left(\frac{\sin[2\pi-(\alpha+\beta)]}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin[2\pi-(\alpha+\beta)]}\right)$$

$\sin[2\pi-(\alpha+\beta)]=-\sin(\alpha+\beta)$ だから⑥は次のようになる。

$$f(\alpha,\ \beta)=\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)+\left(\frac{\sin\alpha}{-\sin(\alpha+\beta)}+\frac{-\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}\right)+\left(\frac{-\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{-\sin(\alpha+\beta)}\right)\cdots\cdots⑦$$

⑦は α，β についての２変数関数で、$0<\alpha<\pi$，$0<\beta<\pi$ の条件で値の変化を確認すればよい。
⑦を α，β で偏微分して、それぞれ 0 とおくと⑧⑨式が得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}=-\cos(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)+\cos\alpha\left(\frac{1}{\sin\beta}-\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}\right)+\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}=0\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑧$$

$$\frac{\partial f}{\partial\beta}=-\cos(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)+\cos\beta\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}\right)+\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}=0\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑨$$

⑧，⑨は、それぞれα，β を入れ替えても変わらないことから、解は$\alpha=\beta$ であることが分かる。
⑧において β を α に変えて、

$$-\frac{2\cos2\alpha}{\sin\alpha}+\cos\alpha\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\sin2\alpha}\right)+\frac{\sin\alpha}{\sin2\alpha}\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin2\alpha}\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\sin2\alpha}{\sin\alpha}=0$$

これを整理すると $\sin\alpha\,(4\cos^2\alpha-1)=0$ が導かれる。$0<\alpha<\pi$ の範囲で解いて、$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2\pi}{3}$

従って $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{3}$ または$\dfrac{2\pi}{3}$ であるが、このとき $\gamma=2\pi-(\alpha+\beta)$ から、$\gamma=\dfrac{2\pi}{3}$ または$\dfrac{4\pi}{3}$ となり

$0 < \alpha < \pi$ なので、$\gamma = \dfrac{2\pi}{3}$ でなければならない。

よって、$\alpha = \beta = \dfrac{2\pi}{3}$ のとき、$f(\alpha,\ \beta)$ が最大値あるいは最小値となる。

$\dfrac{2\pi}{3}$ の前後で⑧の符号を調べるため、$\dfrac{7\pi}{12}(105^\circ\ ) < \dfrac{2\pi}{3}(120^\circ\ ) < \dfrac{5\pi}{6}(150^\circ\ )$ から、

$\dfrac{7\pi}{12}(105^\circ\ )$ と $\dfrac{5\pi}{6}(150^\circ\ )$ を⑧に入れて計算する。〈$\dfrac{\pi}{2}(90^\circ\ )$は分母 $\sin 2\alpha$ が 0 となり不適〉

$\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos\dfrac{7\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\sin\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を入れて符号を調べると

$\alpha = \beta = \dfrac{7\pi}{12}$ のとき $f(\alpha,\ \beta) = -5\sqrt{2} - \sqrt{6} < 0$，$\alpha = \beta = \dfrac{5\pi}{6}$ のとき $f(\alpha,\ \beta) = \dfrac{2}{3} > 0$ となり、

$\dfrac{2\pi}{3}$ の前で偏導関数の値が$(-)$：減少、後で$(+)$：増加なので、最小値であることが分かる。

よって⑤式、

$2(R_A + R_B + R_C) > \dfrac{a+d}{2}\left(\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) + \dfrac{b+e}{2}\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} + \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right) + \dfrac{c+f}{2}\left(\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta} + \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)$ において、

$\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{2\pi}{3}$ の時 $\dfrac{a+d}{2}\left(\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) + \dfrac{b+e}{2}\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} + \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right) + \dfrac{c+f}{2}\left(\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta} + \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)$ が最小値

をとり、$a+b+c+d+e+f$ に等しくなる。$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \dfrac{2\pi}{3}$ の場合はそれより大きい値となるので、

不等号が成り立ち、問題が証明された。

図３は $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{2\pi}{3}$ の場合の一例を示している。

例えば $a = 3$，$b = 4$ とすると、表１のとおりとなる。

a	3
b	4
∠ＡＦＢ	34.7°
∠ＡＢＦ	25.3°
R_A	3.51
l	6.08
$a+b$	7
$2R_A$	7.02

表１

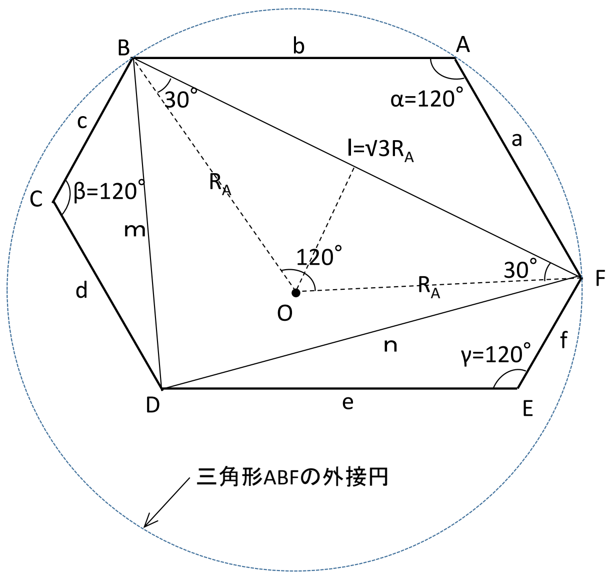


図３

この例の場合では $2R_A > a+b$ となっている。

$2R_A = a+b$ となるのはどのような場合だろうか？

$\dfrac{l}{sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = 2R_A$より $l = \sqrt{3}R_A$、三角形ＡＢＦに余弦定理を適用すると、

$l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\dfrac{2\pi}{3} = a^2 + b^2 + ab$ から、$l = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$

三角形ＯＢＦに余弦定理を適用して、$l^2 = {R_A}^2 + {R_A}^2 - 2{R_A}^2\cos\dfrac{2\pi}{3} = 3{R_A}^2$ より、$l = \sqrt{3}R_A$

以上から、$R_A = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + ab}{3}}$、$2R_A = 2\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + ab}{3}} = a + b$ より、$\dfrac{a^2 + b^2 + ab}{3} = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

整理すると $(a-b)^2 = 0$ となり、$a = b$ が得られる。

従って、$2R_A = a + b$ となるのは $a = b$ のときである。これは六角形の各辺に共通だから、全ての辺が同じ長さで全ての角が１２０°のとき、つまり正六角形の場合に限られる。

図３のように、全ての角が１２０°のときでも、各辺の長さが異なる場合は、表１に示すように $2R_A = 7.02$，$a + b = 7$ なので、$2R_A > a + b$ である。

図４は、$2(R_A + R_B + R_C) = a + b + c + d + e + f$ となる場合を示している。四角形ＡＢＯＦは平行四辺形となり、$2R_A = a + b$ であることが図で明らかである。⊿ＡＢＦの外接円は、他の２つの三角形の共通外接円であり、外心は六角形の中心である。

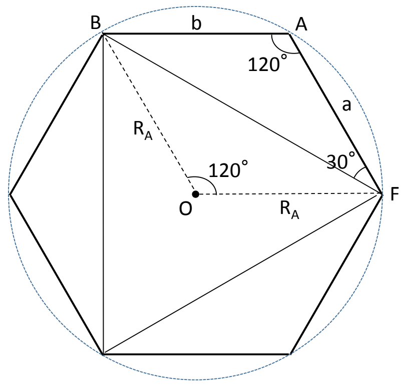


図４

調べたところ、この問題の解答はネット上に紹介されていた。以下それを示す。

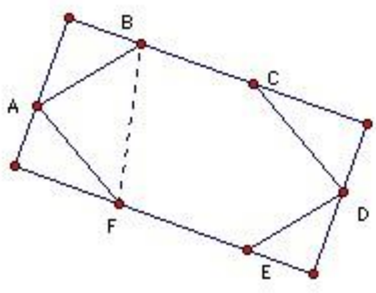
Problem B2

Let ABCDEF be a convex hexagon such that AB is parallel to DE, BC is parallel to EF, and CD is parallel to FA. Let R_A, R_C, R_E denote the circumradii of triangles FAB, BCD, DEF respectively, and let p denote the perimeter of the hexagon. Prove that:

$R_A + R_C + R_E \geq p/2$.

Solution

The starting point is the formula for the circumradius R of a triangle ABC: 2R = a/sin A = b/sin B = c/sin C. [Proof: the side a subtends an angle 2A at the center, so a = 2R sin A.] This gives that $2R_A$ = BF/sin A, $2R_C$ = BD/sin C, $2R_E$ = FD/sin E. It is clearly not true in general that BF/sin A > BA + AF, although it is true if angle FAB $\geq$ 120°, so we need some argument that involves the hexagon as a whole.



Extend sides BC and FE and take lines perpendicular to them through A and D, thus forming a rectangle. Then BF is greater than or equal to the side through A and the side through D. We may find the length of the side through A by taking the projections of BA and AF giving AB sin B + AF sin F. Similarly the side through D is CD sin C + DE sin E. Hence:

2BF ≥ AB sin B + AF sin F + CD sin C + DE sin E. Similarly:

2BD ≥ BC sin B + CD sin D + AF sin A + EF sin E, and

2FD ≥ AB sin A + BC sin C + DE sin D + EF sin F.

Hence 2BF/sin A + 2BD/sin C + 2FD/sin E ≥ AB(sin A/sin E + sin B/sin A) + BC(sin B/sin C + sin C/sin E) + CD(sin C/sin A + sin D/sin C) + DE(sin E/sin A + sin D/sin E) + EF(sin E/sin C + sin F/sin E) + AF(sin F/sin A + sin A/sin C).

We now use the fact that opposite sides are parallel, which implies that opposite angles are equal: A = D, B = E, C = F. Each of the factors multiplying the sides in the last expression now has the form x + 1/x which has minimum value 2 when x = 1. Hence 2(BF/sin A + BD/sin C + FD/sin E) ≥ 2p and the result is proved.

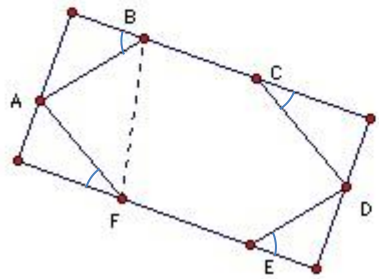
（解答 訳）

まず、三角形ＡＢＣの外接円の半径Ｒは次の式で表される。

$$2R = \frac{a}{sinA} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

側面は中心で角度 $2A$ の範囲内にあるため、$a = 2R\sin A$ である。

これから、$2R_A = \dfrac{BF}{sinA}$ ， $2R_C = \dfrac{BD}{sinC}$ ， $2R_E = \dfrac{FD}{sinE}$



$\dfrac{BF}{sinA} > BA + AF$ が明らかに正しいとは言えないが、一般的にこの式は成り立ち、$\angle FAB \geq 120^\circ$ の場合は $\dfrac{BF}{sinA} \geq BA + AF$ である。

ただし、六角形全体に対しいさらに検討が必要である。

辺ＢＣとＦＥを延長し、ＡとＤを通りそれらに垂直な線を描き、長方形をつくる。このとき、ＢＦはＡを通る辺とＤを通る辺以上の長さとなる。

点Ａを通る辺の長さは、$AB\sin B + AF\sin F$ で与えられる。同様に、点Ｄを通る辺の長さは、$CDsin\,C + DE\,sin\,E$ で与えられるので、次のようになる。

$2BF \geq AB\sin B + AF\sin F + CDsin\,C + DE\,sin\,E$ 　同様に、

$2BD \geq BC\sin B + CD\sin D + AFsin\,A + EF\,sin\,E$ 及び $2FD \geq AB\sin A + BC\sin C + DEsin\,D + EF\,sin\,F$

従って、

$$\frac{2BF}{sin\,A} + \frac{2BD}{sin\,C} + \frac{2FD}{sin\,E} \geq AB\left(\frac{sin\,A}{sin\,E} + \frac{sin\,B}{sin\,A}\right) + BC\left(\frac{sin\,B}{sin\,C} + \frac{sin\,C}{sin\,E}\right) + CD\left(\frac{sin\,C}{sin\,A} + \frac{sin\,D}{sin\,C}\right) + DE\left(\frac{sin\,E}{sin\,A} + \frac{sin\,D}{sin\,E}\right)$$

$$+EF\left(\frac{sin\,E}{sin\,C} + \frac{sin\,F}{sin\,E}\right) + AF\left(\frac{sin\,F}{sin\,A} + \frac{sin\,A}{sin\,C}\right)$$

相対する辺は平行なので、相対する角度は等しく、Ａ ＝Ｄ ， Ｂ＝Ｅ，Ｃ＝Ｆである。

最後の式の各辺を乗算する各因子（　）内は、$x+\dfrac{1}{x}$ の形であり、$x=1$ のときに最小値 2 となる。

したがって、

$2\left(\dfrac{BF}{sin\,A}+\dfrac{BD}{sin\,C}+\dfrac{FD}{sin\,E}\right)\geq 2p$ が証明された。（証明終わり）

解答を見て、私の解と基本的な考え方は一致していることが分かった。

この解答では、“(　) 内は $x+\dfrac{1}{x}$ の形であり、$x=1$ のときに最小値 2 となる。”と結論付けているが

「最小値である」という証明が必要なのではないだろうか？

また、$2BD\geq BC\sin B+CD\sin D+AFsin\,A+EF\,sin\,E$

及び　$2FD\geq AB\sin A+BC\sin C+DEsin\,D+EF\,sin\,F$

において、$BC\sin B$，$EF\,sin\,E$，$BC\,sin\,C$，$EF\,sin\,F$ や∠A，∠Dの取り方が分かりにくいなど、

もう少し、丁寧な説明が必要ではないかと考える。

私が最も悩んだのは、⑤式

$\dfrac{a+d}{2}\left(\dfrac{sin\,\beta}{sin\,\alpha}+\dfrac{sin\,\alpha}{sin\,\beta}\right)+\dfrac{b+e}{2}\left(\dfrac{sin\,\alpha}{sin\,\gamma}+\dfrac{sin\,\gamma}{sin\,\alpha}\right)+\dfrac{c+f}{2}\left(\dfrac{sin\,\gamma}{sin\,\beta}+\dfrac{sin\,\beta}{sin\,\gamma}\right)$

において、角度 α，β，γ によって（　）内の値が決まり、辺の長さ a，b，c，d，e，f に関係なく、必ず $2(R_A+R_B+R_C)\geq a+b+c+d+e+f$ となることを、どのように証明すればよいかということだ。

　そこで、⑤の（　）内の値の変化を調べるため、$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ を考え、$\gamma=2\pi-(\alpha+\beta)$ から、α，β についての２変数関数として、$0<\alpha<\pi$，$0<\beta<\pi$ の条件で変化を確認した。

その結果、$sin\,\alpha=sin\,\beta=sin\,\gamma=120°$ のとき（　）内がすべて 2 となり、それが最小値であることを証明したのである。

　数学オリンピックは、１日４時間半で３問、２日間で合計６問の難問に挑戦する大会。平均１問につき１時間半だから、この問題を時間内に解くのは至難の業、２０世紀で最も平均点が低かった問題ということも頷ける。このような難問をじっくり時間かけて解いていくのは楽しい。いろいろ考えていくうちに問題の核心が掴め、出題者と意思疎通できたような気持ちになることも嬉しい。

（２０２１．１０．０１）