## １１４「エルデシュ・モーデル定理の新しい証明」

任意の三角形ＡＢＣにおいて, その内部の任意の点Ｏから各辺に下ろした垂線の足をＰ, Ｑ, Ｒ とするとき、次の不等式が成り立つ。

ＯＡ＋ＯＢ＋ＯＣ≥２（ＯＰ＋ＯＱ＋ＯＲ）

これをエルデシュ・モーデルの定理という。簡潔で美しい幾何不等式だが、この証明が意外と難しい。

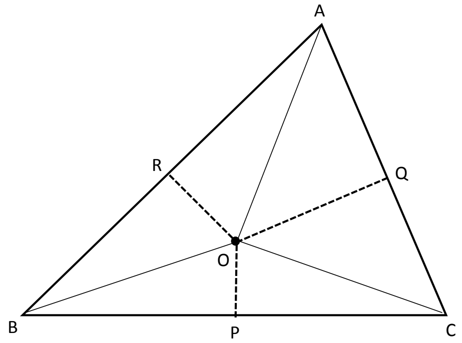

図１

この証明を前項「**１１３ 数学オリンピック２０世紀最難問**」の結果を利用して証明できることに気付いたのでここで紹介したい。

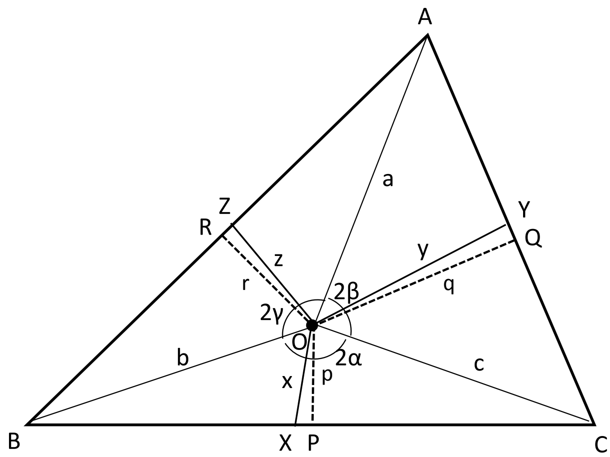

図２

その前に、公開されている証明の一つを紹介する。

図２に示すように、任意の三角形ＡＢＣにおいて, その内部の任意の点をＯとし、∠ＢＯＣ，∠ＣＯＡ，∠ＡＯＢの二等分線と辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢの交点をそれぞれＸ，Ｙ，Ｚとする。

すると、ＯＸ≥ＯＰ，ＯＹ≥ＯＱ，ＯＺ≥ＯＲが成り立つので、エルデシュ・モーデルの定理よりも強い、次の幾何不等式 ＯＡ＋ＯＢ＋ＯＣ≥２（ＯＸ＋ＯＹ＋ＯＺ）を証明することによって、エルデシュ・モーデルの定理ＯＡ＋ＯＢ＋ＯＣ≥２（ＯＰ＋ＯＱ＋ＯＲ）が証明される。

ＯＡ＝a，ＯＢ＝b，ＯＣ＝c，ＯＰ＝p，ＯＱ＝q，ＯＲ＝r，ＯＸ＝x，ＯＹ＝y，ＯＺ＝z，∠ＢＯＣ＝２α，∠ＣＯＡ＝２β，∠ＡＯＢ＝２γとする。

図３の三角形ＡＢＣにおいて、ＡＢ＝a，ＡＣ＝b，頂角Ａの二等分線と対辺ＢＣとの交点をＤ、ＢＤ＝d，ＣＤ＝e，ＡＤ＝ｆとするとき

$2(a+b)f = 2ab\cos\frac{A}{2}$ ·····① が成り立つ（角の二等分線定理）

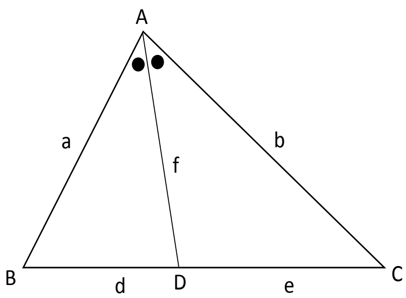

図３

図２において、⊿ＯＢＣに着目し①を適用すると、

$(b+c)x = 2bc\cos\alpha$ が成り立つ 、これを変形して $x = \frac{2bc\cos\alpha}{(b+c)}$、

相加相乗平均の不等式、$b+c \geq 2\sqrt{bc}$ 【$\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2 \geq 0$ より自明】

を用いて、上式と組み合わせると、

$\frac{2bc\cos\alpha}{(b+c)} \leq \frac{2bc\cos\alpha}{2\sqrt{bc}}$，$\frac{2bc\cos\alpha}{(b+c)} \leq \sqrt{bc}\cos\alpha$ より、$x \leq \sqrt{bc}\cos\alpha$ となる。

同様に、$y \leq \sqrt{ca}\cos\beta$ ，$z \leq \sqrt{ab}\cos\gamma$ が導かれるので、次の不等式が成り立つことを示せば良い。

$a+b+c-2\sqrt{bc}\cos\alpha-2\sqrt{ca}\cos\beta-2\sqrt{ab}\cos\gamma \geq 0$ ··················②

②を $\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\left(\sqrt{c}\cos\beta+\sqrt{b}\cos\gamma\right)\sqrt{a} + \left(b+c-2\sqrt{bc}\cos\alpha\right) \geq 0$ ··················③

と変形し、$\sqrt{a}$ に関する二次不等式とみなすと、②が成り立つためには③の判別式が０以下であることが必要十分条件となるので、$\left(\sqrt{c}\cos\beta+\sqrt{b}\cos\gamma\right)^2-\left(b+c-2\sqrt{bc}\cos\alpha\right)\leq 0$ が得られる。

この式を展開整理して、

$-c\sin^2\beta-b\sin^2\gamma+2\sqrt{bc}\,(\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha)\leq 0$

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ より、$\cos\alpha=-\cos(\beta+\gamma)$ だから、$\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma-\cos(\beta+\gamma)$

$=\sin\beta\sin\gamma$ を上式に入れると、

$-c\sin^2\beta-b\sin^2\gamma+2\sqrt{bc}\sin\beta\sin\gamma=-\left(\sqrt{c}\sin\beta-\sqrt{b}\sin\gamma\right)^2\leq 0$ ……………………④

となり、不等式④が成り立つので②が証明され、エルデシュモーデルの定理が証明された。

②は、図４に示すように、各辺の長さが$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$、角度がα，β，γの三角形に余弦定理を適用すれば、

$\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2-2\sqrt{b}\sqrt{c}\cos\alpha=\left(\sqrt{a}\right)^2$ より、

$b+c-2\sqrt{bc}\cos\alpha=a$ が得られ、

同様に、$c+a-2\sqrt{ca}\cos\beta=b$，$a+b-2\sqrt{ab}\cos\gamma=c$ が導かれるので、これらを加えることによっても導くことができる。

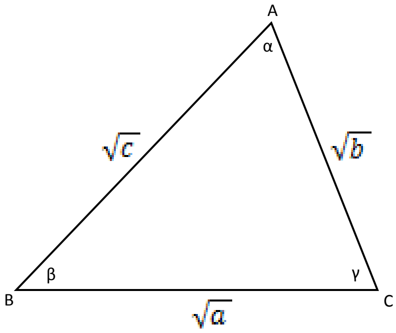

図４

以上は、エルデシュ・モーデルの定理について、より強い幾何不等式に着目することで証明したものである。角の二等分線定理を適用して得られた式を変形、相加相乗平均の不等式と組み合わせることによって得られた不等式を二次不等式とみなし、その判別式から証明したもので、なかなか思いつきにくい着想ではないだろうか？

私が気付いたのは、博想録 前項「**１１３ 数学オリンピック２０世紀最難問**」証明の結果を利用して、エルデシュ・モーデルの定理の証明が簡単にできてしまうことである。

「**１１３**」の⑤式、

$$2(R_A+R_B+R_C)>\frac{a+d}{2}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)+\frac{b+e}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)+\frac{c+f}{2}\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)$$ において、

$2(R_A+R_B+R_C)>a+b+c+d+e+f$ であることを証明するためには、$\alpha+\beta+\gamma=2\pi\,(360^\circ)$ の条件で、$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ の取り得るすべての値について、上式が成り立つことを証明する必要がある。

$\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)+\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)+\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)$ の変化を調べると、$\alpha=\beta=\gamma=\frac{2\pi}{3}$ の時、

（ ）内が最小値となり、その値は２である。このとき、

$\frac{a+d}{2}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)+\frac{b+e}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)+\frac{c+f}{2}\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)$

$=a+b+c+d+e+f$ となるので、

$2(R_A+R_B+R_C)\geq a+b+c+d+e+f$ が証明される。

以上より、「**１１３**」の１図（図５）において、

$a\left(\frac{1}{\sin\alpha_1}-2\right)+b\left(\frac{1}{\sin\alpha_2}-2\right)+c\left(\frac{1}{\sin\beta_1}-2\right)+d\left(\frac{1}{\sin\beta_2}-2\right)$

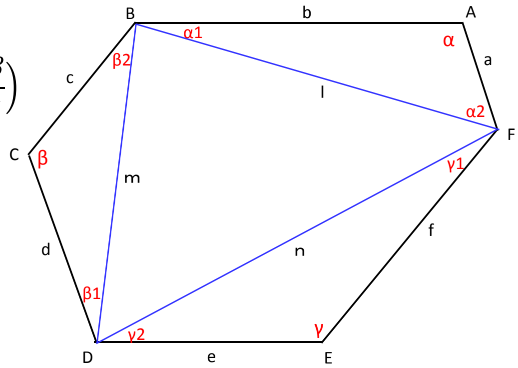

図５

$$+e\left(\frac{1}{sin\,\gamma_1}-2\right)+f\left(\frac{1}{sin\,\gamma_2}-2\right)\geq 0$$

が成り立つことが言え、$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=\pi(180°)$ の条件で、

$\dfrac{1}{sin\,\alpha_1}+\dfrac{1}{sin\,\alpha_2}+\dfrac{1}{sin\,\beta_1}+\dfrac{1}{sin\,\beta_2}+\dfrac{1}{sin\,\gamma_1}+\dfrac{1}{sin\,\gamma_2}$ の値は、$\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=\gamma_1=\gamma_2=\dfrac{\pi}{6}(30°)$

のとき分母が全て１／２で最小値となり、$2(R_A+R_B+R_C)\geq a+b+c+d+e+f$ が成り立つ。

図６において、$\mathrm{AO}=a$，$\mathrm{BO}=b$，$\mathrm{CO}=c$、$\mathrm{PO}=p$，$\mathrm{QO}=q$，$\mathrm{RO}=r$、角度をそれぞれ $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\beta_1$，$\beta_2$，$\gamma_1$，$\gamma_2$ とすると、

$2p=b\,sin\,\beta_2+c\,sin\,\gamma_1$，$2q=c\,sin\,\gamma_2+a\,sin\,\alpha_1$，$2r=a\,sin\,\alpha_2+b\,sin\,\beta_1$ と表せる。

よって、$2(p+q+r)=a\,(sin\,\alpha_1+sin\,\alpha_2)+b(sin\,\beta_1+sin\,\beta_2)+c(sin\,\gamma_1+sin\,\gamma_2)$

$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=\pi$ だから、「１１３」の結果を

適用すると、$\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots\gamma_2=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$a\,(sin\,\alpha_1+sin\,\alpha_2)+b(sin\,\beta_1+sin\,\beta_2)+c(sin\,\gamma_1+sin\,\gamma_2)$

は最小値となり、その時の値は

$a\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)+b\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)+c\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=a+b+c$ である。

以上より、前項の結果を利用することによって、

$a+b+c\ \geq 2(p+q+r)$　つまり、

ＯＡ＋ＯＢ＋ＯＣ≧２（ＯＰ＋ＯＱ＋ＯＲ）が証明された。

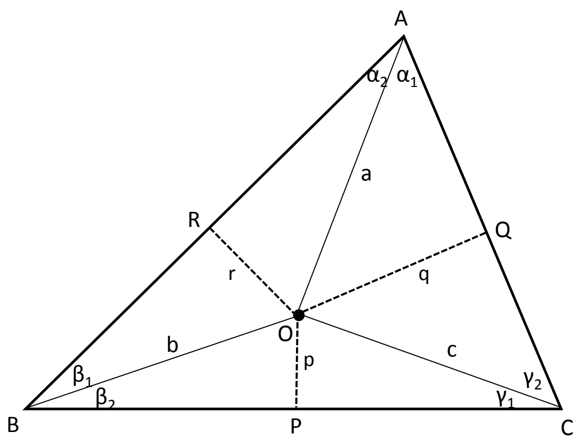


図６

「エルデシュ・モーデルの定理」に関連して、ＯＰ＋ＯＱ＋ＯＲが最大，最小となる点はどうだろうか？

図７のように、三角形ＡＢＣの辺ＢＣの長さを a、内部の任意の点Ｏから各辺に下ろした垂線の長さを p, q, r、∠ＡＢＣ＝α，∠ＡＣＢ＝βとする。

Ｂを原点とするＸ－Ｙ座標を考え、Ｏの座標を$(x,y)$ とする。求めるのは、$p+q+r$ が最大，最小となる$(x,y)$ の位置である。

直線ＡＢ，ＡＣを方程式で表すと、

ＡＢ：$y=tan\,\alpha\,x$

ＡＣ：$y=-tan\,\beta\,(x-a)$

点Ｏから直線ＢＣ，ＡＣ，ＡＢに下ろした垂線の長さ p, q，r はそれぞれ次のように計算される。

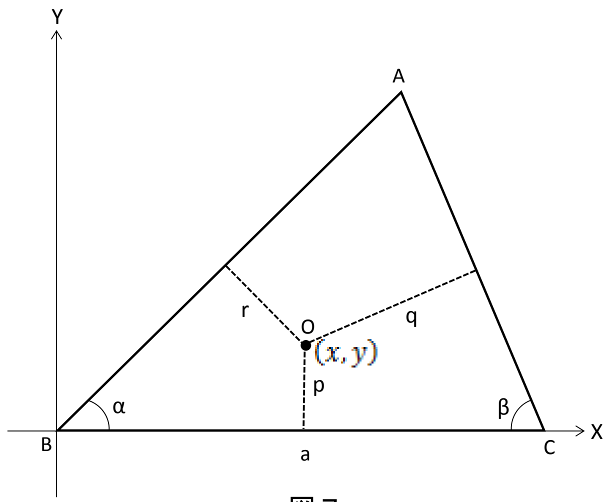


図７

$$p=y,\ \ q=\frac{x\,tan\,\beta+y-a\,tan\,\beta}{\sqrt{1+tan^2\beta}}=x\,sin\,\beta+y\,cos\,\beta-a\,sin\,\beta,\ \ r=\frac{x\,tan\,\alpha-y}{\sqrt{1+tan^2\alpha}}=x\,sin\,\alpha-y\,cos\,\alpha$$

以上より、$p+q+r$ の合計を$f(x,y)$ とすると、

$f(x,y)=p+q+r=(y)+(x\,sin\,\beta+y\,cos\,\beta-a\,sin\,\beta)+(x\,sin\,\alpha-y\,cos\,\alpha)$　整理して、

$f(x,y)=(sin\,\alpha+sin\,\beta)x+(cos\,\beta-cos\,\alpha+1)y-a\,sin\,\beta$　　　・・・・・・・・・・・・・・・・・・⑤

よって、$0\le x\le a$，$0\le y\le tan\,\alpha\,x$，$0\le y\le -tan\,\beta\,(x-a)$ の範囲において $f(x,y)$ の最大値，最小値を求める問題となる。

⑤は直線であり、その勾配はα，βによって決まるので、具体的な数値を与えて検討してみる。

$\mathrm{a}=10$，$\alpha=40^{\circ}$ $\beta=60^{\circ}$ として計算すると図８のようになった。この例では$x=0$ のとき最大値、$x=6$〜$7$ の中間で最小値をとることが分かる。最大値は点Ｂから辺ＡＣに下ろした垂線の長さ $a\,sin\,\beta=10\times sin\,60^{\circ}=8.66$ に等しい。

また、最小値は、点Ａ$\left(x=\frac{cos\,\alpha\,\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}a\right)$から辺ＢＣに下ろした垂線の長さ $AB\,sin\,\alpha=\dfrac{sin\,\beta}{\sin(\alpha+\beta)}a\cdot sin\,\alpha$

$=\dfrac{sin\,60^{\circ}}{\sin(40^{\circ}+60^{\circ})}\cdot 10\cdot sin\,40^{\circ}=5.65$ である。

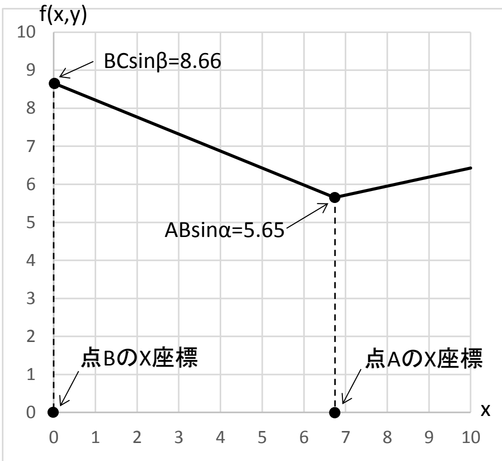

図８

以上より、ＯＰ＋ＯＱ＋ＯＲの最大, 最小となる点は三角形の内部にはなく、いずれかの頂点であることがわかった。

最大値は最も小さい角度の頂点から対辺に下ろした垂線の長さ、最小値は最も大きい角度の頂点から対辺に下ろした垂線の長さとなり、予想とは異なる結果となった。

次に、ＯＡ＋ＯＢ＋ＯＣが最大，最小となる点はどうだろうか？

図９－１において、$a+b+c$ が最大となる点は特別な点であることがすぐに分かる。

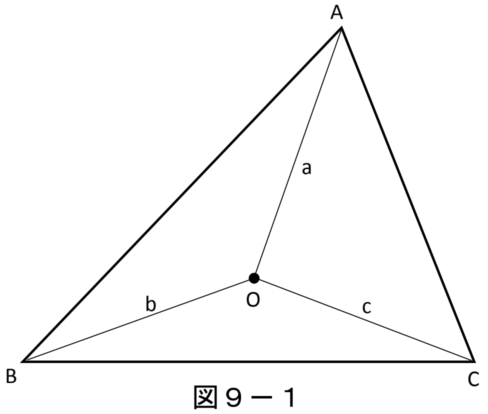

図９－１

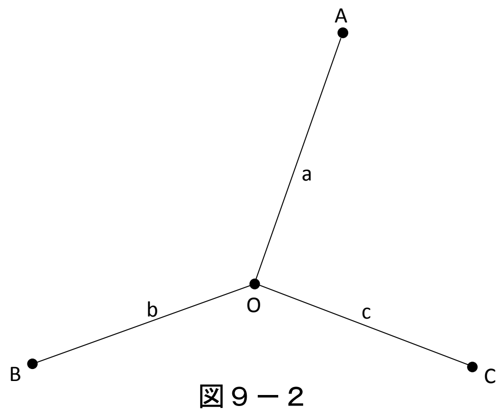

図９－２

その点は図９－１の場合で言えば、角度の最も小さい点Ｂである。

この時 $a=\mathrm{AB}$，$b=0$，$c=BC$ であり、 $a+b+c=AB+BC$ が最大値となる。

最小となる点とは、有名なフェルマー点問題である。図９－２に示すように、三角形に拘らず３つの点から最も近い点を求める問題となる。例えばＡ地区，Ｂ地区，Ｃ地区に電気を供給するとき、どの位置に変電所を設ければ最も配電線を短くできるか、といった経済性に関連した問題につながる。

　この問題を、座標を使って前問と同じように解くことは難しい。

　例えば、点Ｂを原点、点Ｏの座標を $(x,y)$ とすると以下のようになる。

$f(x,y) = a + b + c = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}$ 、微分して０とおくと、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

となり、これを解いて $x,y$ を求めるのは非常に難しい。

　この問題は代数的に解くことは難しいが、幾何学的には比較的容易に解くことができる。

　図１０に示すように、ＡＯを一辺とする正三角形ＡＯＯ’を描くと、辺ＡＯの長さは辺ＯＯ’に移る。点Ａを中心に⊿ＡＯＢを６０°回転させると、辺ＯＢは辺 Ｏ’Ｂ’に移る。これによって、

ＯＡ＋ＯＢ＋ＯＣ＝ＯＯ’＋ Ｏ’Ｂ’＋ＯＣ

となり、折れ線状に並ぶ。

　以上より、ＯＡ＋ＯＢ＋ＯＣの最小値は図に示すように、一直線上に並び直線Ｂ’Ｃに一致する場合であることがわかる。

　また、フェルマー点は、辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡを一辺とする正三角形のそれぞれの頂点と、⊿ＡＢＣの対向する頂点を結んだ３本の直線の交点Ｆで与えられる。

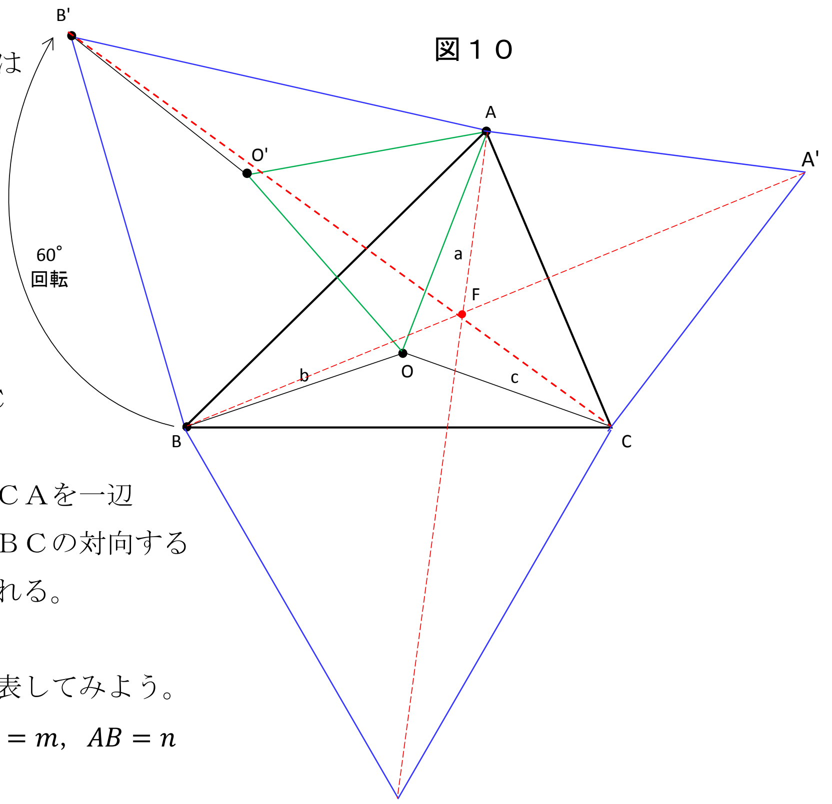


図１０

　フェルマー点の位置を３辺の長さだけで表してみよう。

点Ｂを原点とする座標を考え、$BC = l$，$CA = m$，$AB = n$

$\angle BAC = \alpha$，$\angle CBA = \beta$，$\angle ACB = \gamma$とする。

　直線$A'B$，$B'C$ の方程式はそれぞれ、

$$y = \frac{m\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \gamma\right)}{l + m\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \gamma\right)}x, \qquad y = \frac{-n\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \beta\right)}{l + n\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \beta\right)}(x - l) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤，⑥$$

その交点の座標（$x$，$y$）を求めると、次の⑦⑧となる。

$$x = \frac{l^2 n\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \beta\right) - \frac{lmn}{2}\sin\left[\frac{2}{3}\pi - (\beta+\gamma)\right] + lmn\sin\gamma\cos\beta}{\frac{\sqrt{3}}{2}l^2 + ln\sin\beta + mn\sin\left(\beta + \gamma - \frac{\pi}{3}\right)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑦$$

$$y = \frac{lmn\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \beta\right)\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \gamma\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}l^2 + ln\sin\beta + mn\sin\left(\beta + \gamma - \frac{\pi}{3}\right)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑧$$

三角形ＡＢＣの面積をＳとすると、$sin\,\alpha$， $sin\,\beta$， $sin\,\gamma$， $\cos\alpha$， $\cos\beta$， $\cos\gamma$ は、$l$，$m$，$n$，Ｓを用いて次のように表される。

$$sin\,\alpha=\frac{2S}{mn},\quad sin\,\beta=\frac{2S}{ln},\quad sin\,\gamma=\frac{2S}{lm},\quad \cos\alpha=\frac{-l^2+m^2+n^2}{2mn},\quad \cos\beta=\frac{l^2-m^2+n^2}{2ln},\quad \cos\gamma=\frac{l^2+m^2-n^2}{2lm}$$

この関係を使って座標（$x$，$y$）は、三角形の辺 $l$，$m$，$n$ 及び面積 $S$ だけで次のように表せる。

$$\left[\frac{\frac{S}{2l}(3l^2-2m^2+2n^2)+\frac{\sqrt{3}}{8}l(l^2-m^2+3n^2)}{3S+\frac{\sqrt{3}}{4}(l^2+m^2+n^2)},\ \frac{\frac{1}{8l}[l^2(l^2+m^2+n^2)-2(m^2-n^2)^2]+\frac{\sqrt{3}}{2}lS}{3S+\frac{\sqrt{3}}{4}(l^2+m^2+n^2)}\right]\cdots\cdots\cdots⑨$$

あまり整った式とはいえないが、これが点Ｂを原点としたときのフェルマー点の座標である。
３辺だけで表す場合は、$S$ をヘロンの公式 $S=\frac{1}{4}\sqrt{(l+m+n)(-l+m+n)(l-m+n)(l+m-n)}$ を用いて入れ替えればよいが、複雑になりすぎるので省略する。

例として、⑨を正三角形で確認してみる。三辺を $l=m=n=l$，面積を $S=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$ として計算すると、

$$\frac{\frac{S}{2l}(3l^2-2m^2+2n^2)+\frac{\sqrt{3}}{8}l(l^2-m^2+3n^2)}{3S+\frac{\sqrt{3}}{4}(l^2+m^2+n^2)}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}l^3}{\frac{3\sqrt{3}}{2}l^2}=\frac{l}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{8l}[l^2(l^2+m^2+n^2)-2(m^2-n^2)^2]+\frac{\sqrt{3}}{2}lS}{3S+\frac{\sqrt{3}}{4}(l^2+m^2+n^2)}=\frac{\frac{3}{4}l^3}{\frac{3\sqrt{3}}{2}l^2}=\frac{l}{2\sqrt{3}}$$

となり、フェルマー点は正三角形の中心に一致することが確認できる。

三角形の内部から各辺に下ろした垂線の長さの問題から発展して、三角形の興味深い性質の一端に触れることができた。すべての三角形は、(1) ３つの辺，(2) ２辺とその挟角，(3) １辺とその両側の角度によって決定されるので、三角形の諸性質は全て３つの要素によって表すことができる。

今回検討したフェルマー点の場合は、三辺だけで表そうとすると非常に複雑な式になってしまう。

（２０２１．１０．２９）