１１５「すごいぞ！九点円」

九点円とは、任意の三角形ＡＢＣにおいて、３辺の中点，頂点から対辺に下ろした垂線の足，垂心と３頂点の中点をいう。

図１でいえば、３辺の中点（①②③），頂点から対辺に下ろした垂線の足（④⑤⑥），垂心と３頂点の中点（⑦⑧⑨）である。

九点円の中心はオイラー線（三角形の外心・重心・垂心を通る直線）上の垂心と外心の中点であり、九点円の半径は外接円の半径Ｒの半分である。ここでは、

（１）①～⑨は同一円上にある

（２）内接円は九点円に内接する

（３）傍接円は九点円に外接する

（４）九点円の中心は垂心と外心の中点

（５）九点円の半径は外接円の半径の半分である

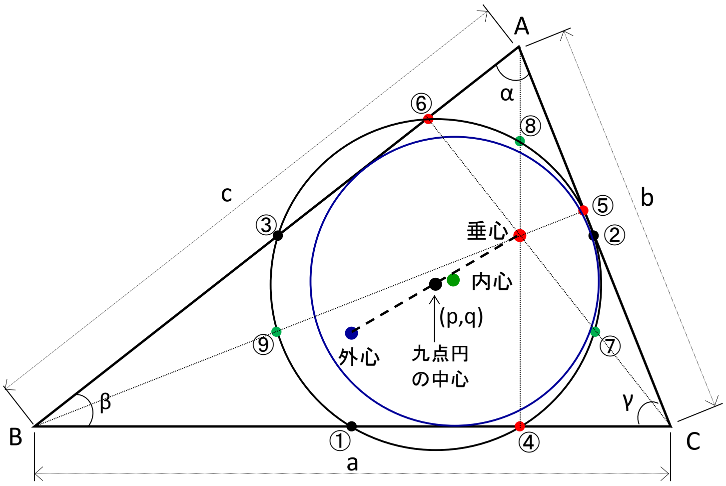

図１

以上の証明を行いたいと思う。

（１）～（５）については幾何学的な証明や、ベクトルを使った証明などが紹介されているが、ここでは三角関数と代数計算により証明を試みる。

１．①～⑨が同一円上にあることの証明

図１に示す三角形ＡＢＣにおいて、辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢの長さをそれぞれａ，ｂ，ｃ、∠ＣＡＢ，∠ＡＢＣ，∠ＢＣＡをそれぞれα，β，γとする。

点Ｂを原点とするＸ－Ｙ座標を考え、九点円の中心の座標を（p，q）とする。

九点円の各点を①～⑨とし、その座標をａ，ｂ，ｃとα，β，γを用いて表すと表１のようになる。

表１

九点円	x 座標	y 座標	九点円	x 座標	y 座標
(1)	$\frac{a}{2}$	0	(6)	$a\cos^2\beta$	$a\sin\beta\cos\beta$
(2)	$c\cos\beta+\frac{b}{2}\cos\gamma$	$\frac{b}{2}\sin\gamma$	(7)	$c\cos\beta+\frac{c\sin\beta}{2\tan\gamma}$	$\frac{c\cos\beta}{2\tan\gamma}$
(3)	$\frac{c}{2}\cos\beta$	$\frac{c}{2}\sin\beta$	(8)	$c\cos\beta$	$c\sin\beta-\frac{c\cos\alpha}{2\sin\gamma}$
(4)	$c\cos\beta$	0	(9)	$\frac{c}{2}\cos\beta$	$\frac{c\cos\beta}{2\tan\gamma}$
(5)	$c\sin\alpha\sin\gamma$	$c\sin\alpha\cos\gamma$			

九点円の中心座標を（p，q），半径をｒとすると、九点円の方程式は次のように表される。

$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ ··················①

p，q，ｒは表１から３点を選んで連立方程式を解くことによって求められる。

まず①に(1)(2)(3)を代入してｐ，ｑ，ｒを求め、次に(4)(5)(6)、さらに(7)(8)(9)を入れて同じように p，q，ｒを計算し、それらすべてが一致すれば九つの点が同一円周上にあることが証明される。

(1)(2)(3)は３辺の中点，(4)(5)(6)は頂点から対辺に下ろした垂線の足，(7)(8)(9)は垂心と３頂点の中点だから、それぞれの３点が全く同じ円を作るということだけでも驚くべきことだ。

p，q，ｒをａ，ｂ，ｃとα，β，γを用いて表すため、(1)(2)(3)を①式に入れて計算を行う。

$(1)(x_1,\ y_1)$，$(2)(x_2,\ y_2)$，$(3)(x_3,\ y_3)$を①に入れてｐ，ｑについて整理すると、

$p^2-2x_1p+q^2-2y_1q=r^2-({x_1}^2+{y_1}^2)$ ··················②

$p^2-2x_2p+q^2-2y_2q=r^2-({x_2}^2+{y_2}^2)$ ··················③

$p^2-2x_3p+q^2-2y_3q=r^2-({x_3}^2+{y_3}^2)$ ··················④

③ －②，④－③を作るとｒが消去され、p，ｑについての連立１次方程式となり、これを解くと、

$$p=\frac{1}{2}\frac{(y_1-y_2)[({x_2}^2-{x_3}^2)+({y_2}^2-{y_3}^2)]-(y_2-y_3)[({x_1}^2-{x_2}^2)+({y_1}^2-{y_2}^2)]}{(x_2-x_3)(y_1-y_2)-(x_1-x_2)(y_2-y_3)} \quad \cdots\cdots⑤$$

$$q=\frac{1}{2}\frac{(x_1-x_2)[({x_2}^2-{x_3}^2)+({y_2}^2-{y_3}^2)]-(x_2-x_3)[({x_1}^2-{x_2}^2)+({y_1}^2-{y_2}^2)]}{(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_2)} \quad \cdots\cdots⑥$$

ここで、$y_2=\dfrac{b}{2}\sin\gamma$ と $y_3=\dfrac{c}{2}\sin\beta$ が等しいことに注意すると、⑤⑥は次のように単純な式になる。

$$p=\frac{1}{2}\frac{(y_1-y_2)({x_2}^2-{x_3}^2)}{(x_2-x_3)(y_1-y_2)}=\frac{1}{2}\frac{{x_2}^2-{x_3}^2}{x_2-x_3}=\frac{1}{2}(x_2+x_3)$$

$$q=\frac{1}{2}\frac{(x_1-x_2)({x_2}^2-{x_3}^2)-(x_2-x_3)[({x_1}^2-{x_2}^2)+({y_1}^2-{y_2}^2)]}{-(x_2-x_3)(y_1-y_2)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(x_1-x_2)(x_2+x_3)-[({x_1}^2-{x_2}^2)+({y_1}^2-{y_2}^2)]}{-(y_1-y_2)}=\frac{1}{2}\frac{(x_1-x_2)(x_3-x_1)-({y_1}^2-{y_2}^2)}{-(y_1-y_2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}{y_1-y_2}+(y_1+y_2)\right]$$

表１の座標(1)(2)(3)

$$(1)\left(x_1=\frac{a}{2},\ y_1=0\right),\ (2)\left(x_2=c\cos\beta+\frac{b}{2}\cos\gamma,\ y_2=\frac{b}{2}\sin\gamma\right),\ (3)\left(x_3=\frac{c}{2}\cos\beta,\ y_3=\frac{c}{2}\sin\beta\right)$$

を⑤⑥に入れて、

$$p=\frac{1}{2}(x_2+x_3)=\frac{1}{2}\left(c\cos\beta+\frac{b}{2}\cos\gamma+\frac{c}{2}\cos\beta\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3c\cos\beta}{2}+\frac{a-c\cos\beta}{2}\right)=\frac{a+2c\cos\beta}{4} \quad \cdots\cdots⑦$$

qについても同じように計算すれば、

$$q=\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}{y_1-y_2}+(y_1+y_2)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{a}{2}-c\cos\beta-\frac{b}{2}\cos\gamma\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{c}{2}\cos\beta\right)}{0-\frac{b}{2}\sin\gamma}+\left(0+\frac{b}{2}\sin\gamma\right)\right]$$

$=-\dfrac{1}{b\sin\gamma}\left[\left(\dfrac{a}{2}-c\cos\beta-\dfrac{b}{2}\cos\gamma\right)\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{c}{2}\cos\beta\right)-\dfrac{b}{4}\sin^2\gamma\right]$　ここで、$\dfrac{a-b\cos\gamma}{2}=\dfrac{c\cos\beta}{2}$

$\dfrac{a-c\cos\beta}{2}=\dfrac{b\cos\gamma}{2}$ ， $b\sin\gamma=c\sin\beta$ であることに注意すれば、

$$q=-\frac{1}{b\sin\gamma}\left[\left(\frac{c\cos\beta}{2}-c\cos\beta\right)\left(\frac{b\cos\gamma}{2}\right)-\frac{b}{4}\sin^2\gamma\right]=-\frac{1}{4\sin\gamma}(-c\cos\beta\cos\gamma-c\sin\beta\sin\gamma)$$

$$=\frac{c\cos(\beta-\gamma)}{4\sin\gamma}=\frac{bc\cos(\beta-\gamma)}{4b\sin\gamma}=\frac{bc\cos(\beta-\gamma)}{4c\sin\beta}=\frac{b\cos(\beta-\gamma)}{4\sin\beta}$$

さらに変形すると、

$$=\frac{b\cos\beta\cos\gamma+b\sin\beta\sin\gamma}{4\sin\beta}=\frac{\cos\beta(b\cos\gamma)+\sin\beta\,(b\sin\gamma)}{4\sin\beta}=\frac{\cos\beta(a-c\cos\beta)+\sin\beta\,(c\sin\beta)}{4\sin\beta}$$

$=\dfrac{a\cos\beta-c\cos^2\beta+c\sin^2\beta}{4\sin\beta}=\dfrac{a\cos\beta-c\cos 2\beta}{4\sin\beta}$　以上の計算より、

$q=\dfrac{b\cos(\beta-\gamma)}{4\sin\beta}$ あるいは、$q=\dfrac{a\cos\beta-c\cos 2\beta}{4\sin\beta}$　…………………⑧

(1) $\left(x_1=\dfrac{a}{2},\ y_1=0\right)$ 及び p，q を①に入れて円の半径 r を求めると、

$r^2=\left[\dfrac{a}{2}-\left(\dfrac{a+2c\cos\beta}{4}\right)\right]^2+\left(0-\dfrac{a\cos\beta-c\cos 2\beta}{4\sin\beta}\right)^2=\left(\dfrac{b}{4\sin\beta}\right)^2$ より、$r=\dfrac{b}{4\sin\beta}$ が得られる。

以上より、点 (1) (2) (3) から導かれた円の方程式は次の⑨で表される。

$\left[x-\left(\dfrac{a+2c\cos\beta}{4}\right)\right]^2+\left(y-\dfrac{a\cos\beta-c\cos 2\beta}{4\sin\beta}\right)^2=\left(\dfrac{b}{4\sin\beta}\right)^2$　…………………⑨

次に、(4)$(x_4=c\cos\beta,\ y_4=0)$，(5)$(x_5=c\sin\alpha\sin\gamma,\ y_5=c\sin\alpha\cos\gamma)$，
(6)$(x_6=a\cos^2\beta,\ y_6=a\sin\beta\cos\beta)$ について、$x_4,x_5,x_6\to x_1,x_2,x_3$，$y_4,y_5,y_6\to y_1,y_2,y_3$ と読み替えて⑤⑥に入れれば次の式が得られる。

$$p=\frac{1}{2}\frac{(-c\sin\alpha\cos\gamma)[(c\sin\alpha\sin\gamma)^2-(a\cos^2\beta)^2+(c\sin\alpha\cos\gamma)^2-(a\sin\beta\cos\beta)^2]}{(c\sin\alpha\sin\gamma-a\cos^2\beta)(-c\sin\alpha\cos\gamma)-(c\cos\beta-c\sin\alpha\sin\gamma)(c\sin\alpha\cos\gamma-a\sin\beta\cos\beta)}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(c\sin\alpha\cos\gamma-a\sin\beta\cos\beta)[(c\cos\beta)^2-(c\sin\alpha\sin\gamma)^2-(c\sin\alpha\cos\gamma)^2]}{(c\sin\alpha\sin\gamma-a\cos^2\beta)(-c\sin\alpha\cos\gamma)-(c\cos\beta-c\sin\alpha\sin\gamma)(c\sin\alpha\cos\gamma-a\sin\beta\cos\beta)}$$

$$q=\frac{1}{2}\frac{(c\cos\beta-c\sin\alpha\sin\gamma)[(c\sin\alpha\sin\gamma)^2-(a\cos^2\beta)^2+(c\sin\alpha\cos\gamma)^2-(a\sin\beta\cos\beta)^2]}{(c\cos\beta-c\sin\alpha\sin\gamma)(c\sin\alpha\cos\gamma-a\sin\beta\cos\beta)-(c\sin\alpha\sin\gamma-a\cos^2\beta)(-c\sin\alpha\cos\gamma)}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(c\sin\alpha\sin\gamma-a\cos^2\beta)[(c\cos\beta)^2-(c\sin\alpha\sin\gamma)^2-(c\sin\alpha\cos\gamma)^2]}{(c\cos\beta-c\sin\alpha\sin\gamma)(c\sin\alpha\cos\gamma-a\sin\beta\cos\beta)-(c\sin\alpha\sin\gamma-a\cos^2\beta)(-c\sin\alpha\cos\gamma)}$$

上式の p，q を、$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$，$\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1$ 、

第一余弦定理（$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$，$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$，$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$）、
第二余弦定理（$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$，$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$，$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$）
$a\sin\beta = b\sin\alpha$，$a\sin\gamma = c\sin\alpha$，$c\sin\beta = b\sin\gamma$ などの関係式を駆使して変形すると、

$$p = \frac{1}{2}\frac{c\sin\alpha\cos\gamma\,(c^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2\beta) + c^2(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)(c\sin\alpha\cos\gamma - a\sin\beta\cos\beta)}{-ac\cos\beta\,(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma)}$$

分母について、$\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$

$= 2\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma$ と変形できる。
分子について、$c\sin\alpha\cos\gamma\,(c^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2\beta) + c^2(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)(c\sin\alpha\cos\gamma - a\sin\beta\cos\beta)$
$= -a^2c\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + ac^2\cos^2\beta\,(\sin\beta\cos\beta - \sin\gamma\cos\gamma)$
$= ac\cos\beta[-a\sin\alpha\cos\alpha + c\cos\beta(\sin\beta\cos\beta - \sin\gamma\cos\gamma)]$
$= ac\cos\beta[-a\,(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma) - b\cos\gamma(\sin\beta\cos\beta - \sin\gamma\cos\gamma)]$
$= ac\cos\beta[-a\,(2\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma) + b\cos\alpha\cos\gamma\sin(\beta-\gamma)]$ と変形できるので、

$$p = \frac{1}{2}\frac{ac\cos\beta[-a\,(2\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma) + b\cos\alpha\cos\gamma\sin(\beta-\gamma)]}{-2ac\cos\beta\,(\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-a\,(2\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma) + b\cos\alpha\cos\gamma\sin(\beta-\gamma)}{-2(\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma)} = \frac{1}{2}\left[a - \frac{b\sin(\beta-\gamma)}{2\sin\beta}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(a - \frac{b}{2}\cos\gamma + \frac{b\sin\gamma\cos\beta}{2\sin\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(a - \frac{a - c\cos\beta}{2} + \frac{c\sin\beta\cos\beta}{2\sin\beta}\right) = \frac{a + 2c\cos\beta}{4}$$

以上より、$p = \dfrac{a + 2c\cos\beta}{4}$

q について、⑤⑥式で分子の [　　] 内は p と同じ、分母は p に対し符号が反転するだけであるから、

$$q = \frac{1}{2}\frac{c(\cos\beta - \sin\alpha\sin\gamma)(c^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2\beta) - c^2(c\sin\alpha\sin\gamma - a\cos^2\beta)(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)}{ac\cos\beta\,(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma)}$$

分子について $c(\cos\beta - \sin\alpha\sin\gamma)(c^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2\beta) - c^2(c\sin\alpha\sin\gamma - a\cos^2\beta)(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)$
$= c\cos\beta\,(c^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2\beta - c^2\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta + ac\cos^3\beta)$
$= c\cos\beta\,[a^2(\sin^2\gamma - \cos^2\beta) + ac\cos\beta(\cos^2\beta - \sin^2\gamma)] = abc\cos\beta\cos\gamma(\sin^2\gamma - \cos^2\beta)$と変形し、

$$q = \frac{1}{2}\frac{abc\cos\beta\cos\gamma(\sin^2\gamma - \cos^2\beta)}{ac\cos\beta\,(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma)} = \frac{1}{2}\frac{abc\cos\beta\cos\gamma(\sin^2\gamma - \cos^2\beta)}{2ac\cos\beta\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma}$$

$$= \frac{b(\sin^2\gamma - \cos^2\beta)}{4\sin\beta\cos\alpha}$$

$\sin^2\gamma - \cos^2\beta = \sin^2\gamma - (1 - \sin^2\beta) = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$
$= -\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - \cos^2\alpha = 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \cos^2\alpha = \cos\alpha(2\sin\beta\sin\gamma - \cos\alpha)$
$\cos\alpha[(\cos(\beta-\gamma) + \cos\alpha) - \cos\alpha] = \cos\alpha\cos(\beta-\gamma)$ と変形すると、

$$q = \frac{b\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)}{4\sin\beta\cos\alpha} = \frac{b\cos(\beta-\gamma)}{4\sin\beta}$$

(4)$(x_4 = c\cos\beta$，$y_4 = 0)$及び p，q を①に入れて円の半径 r を求めると、

$$r^2 = \left[c\cos\beta - \left(\frac{a + 2c\cos\beta}{4}\right)\right]^2 + \left(0 - \frac{a\cos\beta - c\cos 2\beta}{4\sin\beta}\right)^2$$

$$= \frac{c^2}{4}\cos^2\beta + \frac{a^2}{16} - \frac{ac}{4}\cos\beta + \frac{a^2\cos^2\beta - 2ac\cos\beta\cos 2\beta + c^2\cos^2 2\beta}{16\sin^2\beta}$$

$$= \frac{a^2\sin^2\beta + a^2\cos^2\beta}{16\sin^2\beta} + \frac{c^2(1 - 2\sin^2\beta)^2}{16\sin^2\beta} - \frac{ac}{8}\cos\beta\left(2 + \frac{1 - 2\sin^2\beta}{\sin^2\beta}\right) = \frac{a^2 + c^2}{(4\sin\beta)^2} - \frac{2ac\cos\beta}{(4\sin\beta)^2} = \left(\frac{b}{4\sin\beta}\right)^2$$

となり、⑦⑧と同じ結果が得られた。

最後に(7) (8) (9)について、

$y_9 - y_7 = 0$ が利用できるように、③－②，④－②を作り p，q についての連立１次方程式を解くと、

$$p = \frac{1}{2}\frac{(y_1 - y_2)[(x_1{}^2 - x_3{}^2) + (y_1{}^2 - y_3{}^2)] - (y_1 - y_3)[(x_1{}^2 - x_2{}^2) + (y_1{}^2 - y_2{}^2)]}{(x_1 - x_3)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_1 - y_3)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑩$$

$$q = \frac{1}{2}\frac{(x_1 - x_2)[(x_1{}^2 - x_3{}^2) + (y_1{}^2 - y_3{}^2)] - (x_1 - x_3)[(x_1{}^2 - x_2{}^2) + (y_1{}^2 - y_2{}^2)]}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑪$$

$x_7, x_8, x_9 \to x_1, x_2, x_3$，$y_7, y_8, y_9 \to y_1, y_2, y_3$ と読み替えて計算する。

$y_7 = y_9$ から、$y_1 - y_3 = 0$ となるので、⑩⑪式は次のように簡略化される。

$$p = \frac{1}{2}\frac{(y_1 - y_2)(x_1{}^2 - x_3{}^2)}{(x_1 - x_3)(y_1 - y_2)} = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$$

$$q = \frac{1}{2}\left[\frac{(x_1 - x_2)(x_1{}^2 - x_3{}^2) - (x_1 - x_3)\left[(x_1{}^2 - x_2{}^2) + (y_1{}^2 - y_2{}^2)\right]}{-(x_1 - x_3)(y_1 - y_2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_3) - \left[(x_1{}^2 - x_2{}^2) + (y_1{}^2 - y_2{}^2)\right]}{-(y_1 - y_2)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) - (y_1{}^2 - y_2{}^2}{-(y_1 - y_2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)}{y_1 - y_2} + (y_1 + y_2)\right]$$

この p，q に (7) $\left(x_7 = c\cos\beta + \frac{c\sin\beta}{2\tan\gamma},\ y_7 = \frac{c\cos\beta}{2\tan\gamma}\right)$，(8) $\left(x_8 = c\cos\beta,\ y_8 = c\sin\beta - \frac{c\cos\alpha}{2\sin\gamma}\right)$，

(9) $\left(x_9 = \frac{c}{2}\cos\beta,\ y_9 = \frac{c\cos\beta}{2\tan\gamma}\right)$ を入れて計算すると、

$$p = \frac{1}{2}(x_1 + x_3) = \frac{1}{2}\left(c\cos\beta + \frac{c\sin\beta}{2\tan\gamma} + \frac{c}{2}\cos\beta\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3c}{2}\cos\beta + \frac{c\sin\beta\cos\gamma}{2\sin\gamma}\right)$$

$$= \frac{c}{4\sin\gamma}(3\sin\gamma\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma) = \frac{c}{4\sin\gamma}[2\sin\gamma\cos\beta + \sin(\beta + \gamma)]$$

$$= \frac{c}{4\sin\gamma}(2\sin\gamma\cos\beta + \sin\alpha) = \frac{c}{2}\cos\beta + \frac{c\sin\alpha}{4\sin\gamma} = \frac{c}{2}\cos\beta + \frac{a\sin\gamma}{4\sin\gamma} = -\frac{a + 2c\cos\beta}{4}$$

$$q = \frac{1}{2}\left[\frac{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)}{y_1 - y_2} + (y_1 + y_2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(c\cos\beta+\frac{c\sin\beta}{2\tan\gamma}-c\cos\beta\right)\left(c\cos\beta-\frac{c}{2}\cos\beta\right)}{\frac{c\cos\beta}{2\tan\gamma}-\left(c\sin\beta-\frac{c\cos\alpha}{2\sin\gamma}\right)}+\left(\frac{c\cos\beta}{2\tan\gamma}+c\sin\beta-\frac{c\cos\alpha}{2\sin\gamma}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{c^2\sin\beta\cos\beta\cos\gamma}{4\sin\gamma}}{\frac{c\cos\beta\cos\gamma-2c\sin\beta\sin\gamma+c\cos\alpha}{2\sin\gamma}}+\frac{c\cos\beta\cos\gamma+2c\sin\beta\sin\gamma-c\cos\alpha}{2\sin\gamma}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-c\cos\beta\cos\gamma}{2\sin\gamma}+\frac{c\cos\beta\cos\gamma+2c\sin\beta\sin\gamma-c\cos\alpha}{2\sin\gamma}\right]=\frac{1}{2}\frac{2c\sin\beta\sin\gamma-c\cos\alpha}{2\sin\gamma}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{c\ \cos(\beta-\gamma)-c\cos(\beta+\gamma)-c\cos\alpha}{2\sin\gamma}=\frac{c\cos(\beta-\gamma)}{4\sin\gamma}=\frac{b\cos(\beta-\gamma)}{4\sin\beta}$$

(9) $\left(x_9=\frac{c}{2}\cos\beta\,,\ y_9=\frac{c\cos\beta}{2\tan\gamma}\right)$及び$p$，$q$を①に入れて円の半径$r$を求めると、

$$r^2=\left[\frac{c}{2}\cos\beta-\left(\frac{a+2c\cos\beta}{4}\right)\right]^2+\left(\frac{c\cos\beta}{2\tan\gamma}-\frac{a\cos\beta-c\cos2\beta}{4\sin\beta}\right)^2$$

$$=\frac{a^2}{16}+\left(\frac{c\cos\beta\cos\gamma}{2\sin\gamma}+\frac{c-a\cos\beta}{4\sin\beta}-\frac{c\sin\beta}{2}\right)^2=\frac{a^2}{16}+\left(\frac{c(\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\ \sin\gamma)}{2\sin\gamma}+\frac{c-a\cos\beta}{4\sin\beta}\right)^2$$

$$=\frac{a^2}{16}+\left(\frac{c\cos(\beta+\gamma)}{2\sin\gamma}+\frac{b\cos\alpha}{4\sin\beta}\right)^2=\frac{a^2}{16}+\left(-\frac{c\cos\alpha}{2\sin\gamma}+\frac{b\cos\alpha}{4\sin\beta}\right)^2=\frac{a^2}{16}+\left[-\frac{\cos\alpha(-2c\sin\beta+b\sin\gamma)}{4\sin\beta\sin\gamma}\right]^2$$

$$=\frac{a^2}{16}+\left(-\frac{b\ \sin\gamma\cos\alpha}{4\sin\beta\sin\gamma}\right)^2=\frac{a^2}{16}+\left(-\frac{c-a\cos\beta}{4\sin\beta}\right)^2=\frac{a^2}{16}+\frac{c^2-2ac\cos\beta+a^2\cos^2\beta}{(4\sin\beta)^2}=\left(\frac{b}{4\sin\beta}\right)^2$$

となり、⑦⑧と同じ結果が得られた。以上より３つの円は一致し、点(1)～(9)は同一円上にあり九点円が証明された。

２．内接円が九点円に内接することの証明

九点円の中心座標を$(x_1,\ y_1)$，半径をr_1、内接円の中心座標を$(x_2,\ y_2)$，半径をr_2とすると、内接円が九点円に内接するための条件は、次の⑫式で表される。

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(r_1-r_2)^2 \qquad \cdots\cdots\cdots⑫$$

x_1，y_1，r_1は１で求めた⑦⑧⑨である。

$$x_1=\frac{a+2c\cos\beta}{4},\quad y_1=\frac{a\cos\beta-c\cos2\beta}{4\sin\beta},\quad r_1=\frac{b}{4\sin\beta}$$

図１より、内接円の半径r_2はy_2に等しい。三角形ＡＢＣの面積をＳとすると、

$$S=\frac{a+b+c}{2}\,r_2,\quad S=\frac{1}{2}ac\sin\beta \text{ から、} r_2=\frac{ac\sin\beta}{a+b+c},\quad x_2=\frac{a\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2ac\cos^2\frac{\beta}{2}}{a+b+c}$$

と表せる。

⑫を展開して、$(x_1{}^2+x_2{}^2-2x_1x_2)+(y_1{}^2+y_2{}^2-2y_1y_2)=r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2$

この式にx_1，y_1，r_1，x_2，y_2，r_2を入れると、

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 - 2\,x_1x_2 = \left(\frac{a+2c\,cos\,\beta}{4}\right)^2 + \left(\frac{2ac\,cos^2\frac{\beta}{2}}{a+b+c}\right)^2 - 2\left(\frac{a+2c\,cos\,\beta}{4}\right)\left(\frac{2ac\cos^2\frac{\beta}{2}}{a+b+c}\right)$$

$$y_1{}^2 + y_2{}^2 - 2\,y_1y_2 = \left(\frac{a\,cos\,\beta - c\,cos\,2\beta}{4\,sin\,\beta}\right)^2 + \left(\frac{ac\,sin\,\beta}{a+b+c}\right)^2 - 2\left(\frac{a\,cos\,\beta - c\,cos\,2\beta}{4\,sin\,\beta}\right)\left(\frac{ac\,sin\,\beta}{a+b+c}\right)$$

$$r_1{}^2 + r_2{}^2 - 2\,r_1r_2 = \left(\frac{b}{4\,sin\,\beta}\right)^2 + \left(\frac{ac\,sin\,\beta}{a+b+c}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{4\,sin\,\beta}\right)\left(\frac{ac\,sin\,\beta}{a+b+c}\right)$$

次のように、各項に番号をつけて組み合わせながら計算を行う。

$$\left(\frac{a+2c\,cos\,\beta}{4}\right)^2 \quad \cdots\cdots(1) \quad \left(\frac{2ac\,cos^2\frac{\beta}{2}}{a+b+c}\right)^2 \cdots\cdots(2) \quad -2\left(\frac{a+2c\,cos\,\beta}{4}\right)\left(\frac{2ac\,cos^2\frac{\beta}{2}}{a+b+c}\right) \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\left(\frac{a\,cos\,\beta - c\,cos\,2\beta}{4\,sin\,\beta}\right)^2 \cdots\cdots(4) \quad \left(\frac{ac\,sin\,\beta}{a+b+c}\right)^2 \cdots\cdots(5) \quad -2\left(\frac{a\,cos\,\beta - c\,cos\,2\beta}{4\,sin\,\beta}\right)\left(\frac{ac\,sin\,\beta}{a+b+c}\right) \cdots\cdots(6)$$

$$\left(\frac{b}{4\,sin\,\beta}\right)^2 \quad \cdots\cdots(7) \quad \left(\frac{ac\,sin\,\beta}{a+b+c}\right)^2 \quad \cdots\cdots(8) \quad -2\left(\frac{b}{4\,sin\,\beta}\right)\left(\frac{ac\,sin\,\beta}{a+b+c}\right) \quad \cdots\cdots(9)$$

上の式において、(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)−(7)−(8)−(9)=0 を証明すればよい。
(5)と(8)は同じなので消去され、(1)+(2)+(3)+(4)+(6)−(7)−(9)=0
まず、(4)−(7)を計算すると、

$$\left(\frac{a\,cos\,\beta - c\,cos\,2\beta}{4\,sin\,\beta}\right)^2 - \left(\frac{b}{4\,sin\,\beta}\right)^2 = \frac{1}{(4\,sin\,\beta)^2}[(a\,cos\,\beta - c\,cos\,2\beta)^2 - b^2]$$

$$= \frac{1}{(4\,sin\,\beta)^2}(a^2\,cos^2\,\beta + c^2\,cos^2\,2\beta - 2ac\,cos\,\beta\,cos\,2\beta - b^2)$$

$$= \frac{1}{(4\,sin\,\beta)^2}(a^2\,cos^2\,\beta + 4c^2\,cos^4\,\beta - 4c^2\,cos^2\,\beta + c^2 - 4ac\,cos^3\,\beta + 2ac\,cos\,\beta - b^2)$$

$$= \frac{1}{(4\,sin\,\beta)^2}(a^2\,cos^2\,\beta - 4c^2\,sin^2\,\beta\,cos^2\,\beta - 4ac\,cos^3\,\beta + 4ac\,cos\,\beta - a^2)$$

$$= \frac{1}{(4\,sin\,\beta)^2}(-a^2\,sin^2\,\beta - 4c^2\,sin^2\,\beta\,cos^2\,\beta + 4ac\,sin^2\,\beta\,cos\,\beta)$$

$$= \frac{1}{(4\,sin\,\beta)^2}[-a^2\,sin^2\,\beta + 4c\,sin^2\,\beta\,(a\,cos\,\beta - c\,cos^2\,\beta)]$$

$$= \frac{1}{(4\,sin\,\beta)^2}[-a^2\,sin^2\,\beta + 4c\,sin^2\,\beta\,cos\,\beta\,(a - c\,cos\,\beta)] = \frac{1}{(4\,sin\,\beta)^2}[-a^2\,sin^2\,\beta + 4bc\,sin^2\,\beta\,cos\,\beta\,cos\,\gamma]$$

$$= \frac{1}{(4\,sin\,\beta)^2}\,sin^2\,\beta\,(4bc\,cos\,\beta\,cos\,\gamma - a^2) = \frac{4bc\,cos\,\beta\,cos\,\gamma - a^2}{4^2}$$

この結果に(1)を加えると、

$$\frac{4bc\,cos\,\beta\,cos\,\gamma - a^2}{4^2} + \left(\frac{a+2c\,cos\,\beta}{4}\right)^2 = \frac{4bc\,cos\,\beta\,cos\,\gamma - a^2}{4^2} + \frac{a^2 + 4c^2\,cos^2\,\beta + 4ac\,cos\,\beta}{4^2}$$

$$=\frac{4c\,cos\,\beta\,(b\,cos\,\gamma+a)+4c^2\,cos^2\,\beta}{4^2}=\frac{4c\,cos\,\beta\,(2a-c\,cos\,\beta)+4c^2\,cos^2\,\beta}{4^2}=\frac{8ac\,cos\,\beta}{4^2}=\frac{ac\,cos\,\beta}{2}$$

以上より、$(4)-(7)+(1)=\dfrac{ac\,cos\,\beta}{2}$

(6)−(9)を計算すると、

$$-2\left(\frac{a\,cos\,\beta-c\,cos\,2\beta}{4\,sin\,\beta}\right)\left(\frac{ac\,sin\,\beta}{a+b+c}\right)+2\left(\frac{b}{4\,sin\,\beta}\right)\left(\frac{ac\,sin\,\beta}{a+b+c}\right)$$

$$=\frac{2ac\,sin\,\beta[b-(\,a\,cos\,\beta-c\,cos\,2\beta)]}{4\,sin\,\beta\,(a+b+c)}=\frac{ac(b-\ a\,cos\,\beta+c\,cos\,2\beta)}{2(a+b+c)}$$

この結果に(3)を加えると、

$$\frac{ac(b-\ a\,cos\,\beta+c\,cos\,2\beta)}{2(a+b+c)}-2\left(\frac{a+2c\,cos\,\beta}{4}\right)\left(\frac{2ac\cos^2\frac{\beta}{2}}{a+b+c}\right)$$

$$=\frac{ac(b-\ a\,cos\,\beta+c\,cos\,2\beta)}{2(a+b+c)}-\frac{2ac\cos^2\frac{\beta}{2}(a+2c\,cos\,\beta)}{2(a+b+c)}$$

$$=\frac{ac\left(b-\ a\,cos\,\beta+c\,cos\,2\beta-2a\cos^2\frac{\beta}{2}-4c\,cos\,\beta\cos^2\frac{\beta}{2}\right)}{2(a+b+c)}=\frac{ac[b-a(2\,cos\,\beta+1)-c(2\,cos\,\beta+1)]}{2(a+b+c)}$$

$$=\frac{ac[(-a+b-c)-2(a+c)\,cos\,\beta]}{2(a+b+c)}$$

以上より、$(6)-(9)+(3)=\dfrac{ac[(-a+b-c)-2(a+c)\,cos\,\beta]}{2(a+b+c)}$

この結果にさらに(2)を加えると、

$$\frac{ac[(-a+b-c)-2(a+c)\,cos\,\beta]}{2(a+b+c)}+\left(\frac{2ac\cos^2\frac{\beta}{2}}{a+b+c}\right)^2$$

$$=\frac{ac(a+b+c)[(-a+b-c)-2(a+c)\,cos\,\beta]}{2(a+b+c)^2}+\frac{[ac(cos\,\beta+1)]^2}{(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{ab^2c-a^3c-2a^2c^2-ac^3-(2a^3c+2a^2bc+4a^2c^2+2abc^2+2ac^3)\,cos\,\beta}{2(a+b+c)^2}$$

$$+\frac{2a^2c^2\,cos^2\,\beta+4a^2c^2\,cos\,\beta+2a^2c^2}{2(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{2a^2c^2\,cos^2\,\beta-2ac\,cos\,\beta\,[-b^2-(ab+bc+ca)]}{2(a+b+c)^2}-\frac{2ac\,cos\,\beta\,(a+b+c)^2}{2(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{ac\,cos\,\beta\,[2ac\,cos\,\beta+2b^2+2(ab+bc+ca)]}{2(a+b+c)^2}-ac\,cos\,\beta$$

$$= \frac{ac\cos\beta\,[2ac\cos\beta + 2b^2 + (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)]}{2(a+b+c)^2} - ac\cos\beta$$

$$= \frac{ac\cos\beta\,[2ac\cos\beta + 2b^2 - (a^2+b^2+c^2)]}{2(a+b+c)^2} + \frac{ac\cos\beta(a+b+c)^2}{2(a+b+c)^2} - ac\cos\beta$$

$$= \frac{ac\cos\beta\,[2ac\cos\beta + 2b^2 - (a^2+b^2+c^2)]}{2(a+b+c)^2} + \frac{ac\cos\beta}{2} - ac\cos\beta = -\frac{ac\cos\beta}{2}$$

上式において、$2b^2 - (a^2+b^2+c^2) = b^2 - a^2 - c^2 = -2ac\cos\beta$ であるから、第１項は０である。

以上より、$(9) - (6) - (3) + (2) = -\frac{ac\cos\beta}{2}$ となる。これまでの計算結果から、

$\frac{ac\cos\beta}{2} - \frac{ac\cos\beta}{2} = 0$ 、$(1) + (2) + (3) + (4) + (6) - (7) - (9) = 0$ となる。

従って、内接円が九点円に内接することが証明された。

　それでは、２つの円が接する点の座標はどうなるだろうか？
円が接する点は、２つの円の方程式の解として与えられ、それは重根となるはずである。
しかし、２つの２次式を連立方程式として解こうとすると４次方程式となり、一般解を求めることは非常に難しい。そこで、九点円の中心と内接円の中心を通る直線を求め、その直線と九点円または内接円との交点が求める点に一致するので、それを計算する。

　九点円の中心を $(x_1,\ y_1)$，半径を r_1、内接円の中心を $(x_2,\ y_2)$，半径を r_2 とすると、
九点円の方程式は、

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = {r_1}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑬$$

内接円の方程式は、

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = {r_2}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑭$$

２つの円の中心を通る直線は、

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2) + y_2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑮$$

となる。⑭と⑮を連立させて解くと、その交点の座標は以下の式で与えられる。

$$x = x_2 \pm \frac{y_2\,(x_1 - x_2)}{\sqrt{\ (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}}\ ,\ \ y = y_2 \pm \frac{y_2(y_1 - y_2)}{\sqrt{\ (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}}$$

このうち、２円が接する点の座標は⑭である。

$$x = x_2 - \frac{y_2\,(x_1 - x_2)}{\sqrt{\ (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}}\ ,\ \ y = y_2 - \frac{y_2(y_1 - y_2)}{\sqrt{\ (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑯$$

内接円が九点円に内接するための条件⑫式から、

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (r_1 - r_2)^2$ を⑯に入れ、$y_2 = r_2$ を考慮すると、

$$x = \frac{r_1x_2 - r_2x_1}{r_1 - r_2},\ \ y = \frac{r_1y_2 - r_2y_1}{r_1 - r_2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑰$$ 　と表すことができる。

$$x_1 = \frac{a + 2c\cos\beta}{4},\ \ y_1 = \frac{a\cos\beta - c\cos 2\beta}{4\sin\beta},\ \ x_2 = \frac{2ac\cos^2\frac{\beta}{2}}{a+b+c} = \frac{ac(1+\cos\beta)}{a+b+c},\ \ y_2 = \frac{ac\sin\beta}{a+b+c}$$

$r_1 = \dfrac{b}{4\sin\beta}$，　$r_2 = \dfrac{ac\sin\beta}{a+b+c}$ を⑰に入れて計算する。

$$x = \frac{\dfrac{b}{4\sin\beta}\cdot\dfrac{ac(1+\cos\beta)}{a+b+c} - \dfrac{ac\sin\beta}{a+b+c}\cdot\dfrac{a+2c\cos\beta}{4}}{\dfrac{b}{4\sin\beta} - \dfrac{ac\sin\beta}{a+b+c}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{4\sin\beta\,(a+b+c)}\left[\,abc(1+\cos\beta) - ac\sin^2\beta\,(a+2c\cos\beta)\right]}{\dfrac{1}{4\sin\beta\,(a+b+c)}\left[\,b(a+b+c) - 4ac\sin^2\beta\right]}$$

$$= \underline{\underline{\frac{abc(1+\cos\beta) - ac\sin^2\beta\,(a+2c\cos\beta)}{b(a+b+c) - 4ac\sin^2\beta}}}$$

$$y = \frac{r_1y_2 - r_2y_1}{r_1 - r_2} = \frac{\dfrac{b}{4\sin\beta}\cdot\dfrac{ac\sin\beta}{a+b+c} - \dfrac{ac\sin\beta}{a+b+c}\cdot\dfrac{a\cos\beta - c\cos 2\beta}{4\sin\beta}}{\dfrac{b}{4\sin\beta} - \dfrac{ac\sin\beta}{a+b+c}} = \underline{\underline{\frac{ac\sin\beta\,[b(1+\cos\alpha) - 2c\sin^2\beta]}{b(a+b+c) - 4ac\sin^2\beta}}}$$

ここで求めた九点円と内接円の接点は、九点円の発見者の名を取りフォイエルバッハ点と呼ばれている。

３．傍接円が九点円に外接することの証明

三角形の２つの外角の二等分線と他の内角の二等分線は１点で交わり、これを傍心という。三角形に対し傍接円は３つ存在するが、ここでは図２に示す最大の辺ＢＣに接する傍接円（Ｊ１）が九点円に接することを計算により証明する。

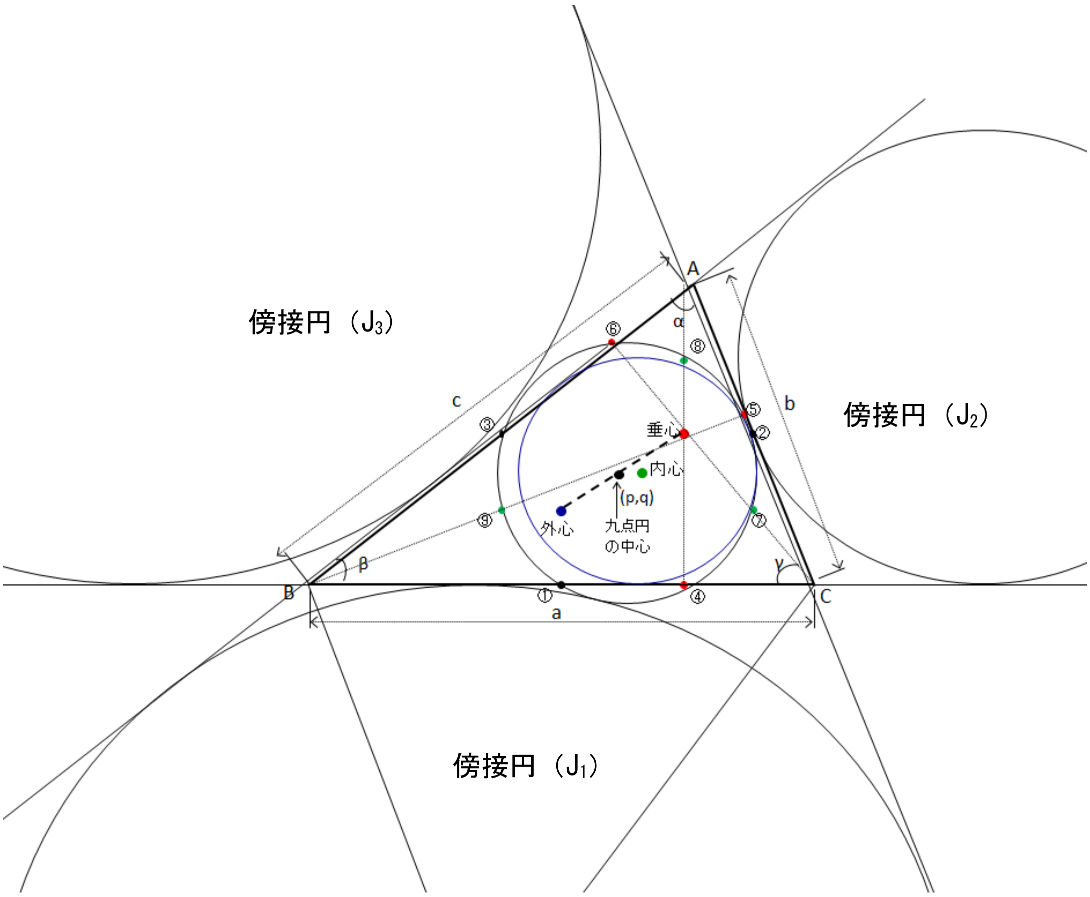

図２

九点円の中心座標を $(x_1,\ y_1)$，半径を r_1 、傍接円の中心座標を $(x_3,\ y_3)$，半径を r_3 とすると、傍接円が九点円に外接するための条件は、次の⑱式で表される。

$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 = (r_1 + r_3)^2$ ………………⑱

x_1，y_1，r_1 は１で求めた⑦⑧⑨である。

$$x_1 = \frac{a + 2c\cos\beta}{4},\quad y_1 = \frac{a\cos\beta - c\cos 2\beta}{4\sin\beta},\quad r_1 = \frac{b}{4\sin\beta}$$

傍接円(Ｊ１)の半径 r_{j1} と三角形の面積(Ｓ)の関係は $S = \frac{-a+b+c}{2} r_{j1}$ と表せる。

因みに傍接円Ｊ２，Ｊ３とＳの関係は $S = \frac{a-b+c}{2} r_{j12} = \frac{a+b-c}{2} r_{j3}$ である。

$S = \frac{-a+b+c}{2} r_{j1}$，$S = \frac{1}{2} ac\sin\beta$ から $r_3(r_{j1}) = \frac{ac\sin\beta}{-a+b+c}$，$x_3 = r_3 \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{2ac\sin^2\frac{\beta}{2}}{-a+b+c}$

図２より、傍接円Ｊ１の半径 r_3 は y_3 に等しく座標はマイナスなので、$y_3 = -\frac{ac\sin\beta}{-a+b+c}$ である。

⑱を展開すると、$({x_1}^2 + {x_3}^2 - 2x_1x_3) + ({y_1}^2 + {y_3}^2 - 2y_1y_2) = {r_1}^2 + {r_3}^2 + 2r_1r_3$

この式に x_1，y_1，r_1，x_3，y_3，r_3 を入れると、

$$ {x_1}^2 + {x_3}^2 - 2x_1x_3 = \left(\frac{a+2c\cos\beta}{4}\right)^2 + \left(\frac{2ac\sin^2\frac{\beta}{2}}{-a+b+c}\right)^2 - 2\left(\frac{a+2c\cos\beta}{4}\right)\left(\frac{2ac\sin^2\frac{\beta}{2}}{-a+b+c}\right)$$

$$ {y_1}^2 + {y_3}^2 - 2y_1y_3 = \left(\frac{a\cos\beta - c\cos 2\beta}{4\sin\beta}\right)^2 + \left(\frac{ac\sin\beta}{-a+b+c}\right)^2 - 2\left(\frac{a\cos\beta - c\cos 2\beta}{4\sin\beta}\right)\left(-\frac{ac\sin\beta}{-a+b+c}\right)$$

$$ {r_1}^2 + {r_3}^2 + 2r_1r_3 = \left(\frac{b}{4\sin\beta}\right)^2 + \left(\frac{ac\sin\beta}{-a+b+c}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{4\sin\beta}\right)\left(\frac{ac\sin\beta}{-a+b+c}\right)$$

内接円の場合と同様に、各項に番号をつけて組み合わせながら計算を行う。

$\left(\frac{a+2c\cos\beta}{4}\right)^2$ ……(1)　$\left(\frac{2ac\sin^2\frac{\beta}{2}}{-a+b+c}\right)^2$ ……(2)　$-2\left(\frac{a+2c\cos\beta}{4}\right)\left(\frac{2ac\sin^2\frac{\beta}{2}}{-a+b+c}\right)$ ……(3)

$\left(\frac{a\cos\beta - c\cos 2\beta}{4\sin\beta}\right)^2$ …(4)　$\left(\frac{ac\sin\beta}{-a+b+c}\right)^2$ ……(5)　$-2\left(\frac{a\cos\beta - c\cos 2\beta}{4\sin\beta}\right)\left(-\frac{ac\sin\beta}{-a+b+c}\right)$ ……(6)

$\left(\frac{b}{4\sin\beta}\right)^2$ ……(7)　$\left(\frac{ac\sin\beta}{-a+b+c}\right)^2$ ……(8)　$2\left(\frac{b}{4\sin\beta}\right)\left(\frac{ac\sin\beta}{-a+b+c}\right)$ ……(9)

上の式において(5)と(8)は同じなので消去され、(1)+(2)+(3)+(4)+(6)−(7)−(9)=0 を証明すればよい。

$(4) - (7) + (1)$は内接円の場合と同じなので、$(4) - (7) + (1) = \frac{ac\cos\beta}{2}$ である。

(6)−(9)を計算すると、

$$-2\left(\frac{a\,cos\,\beta-c\,cos\,2\beta}{4\,sin\,\beta}\right)\left(-\frac{ac\,sin\,\beta}{-a+b+c}\right)-2\left(\frac{b}{4\,sin\,\beta}\right)\left(\frac{ac\,sin\,\beta}{-a+b+c}\right)=$$

$$=\frac{ac\,sin\,\beta[(a\,cos\,\beta-c\,cos\,2\beta)-b]}{2\,sin\,\beta\,(-a+b+c)}=\frac{ac(-b+\ a\,cos\,\beta-c\,cos\,2\beta)}{2(-a+b+c)}$$

この結果に(3)を加えると、

$$\frac{ac(-b+\ a\,cos\,\beta-c\,cos\,2\beta)}{2(-a+b+c)}-2\left(\frac{a+2c\,cos\,\beta}{4}\right)\left(\frac{2ac\,sin^2\frac{\beta}{2}}{-a+b+c}\right)$$

$$=\frac{ac(-b+\ a\,cos\,\beta-c\,cos\,2\beta)}{2(-a+b+c)}-\frac{2ac\,sin^2\frac{\beta}{2}\,(a+2c\,cos\,\beta)}{2(-a+b+c)}$$

$$=\frac{ac\left(-b+\ a\,cos\,\beta-c\,cos\,2\beta-2a\,sin^2\frac{\beta}{2}-4c\,cos\,\beta\,\sin^2\frac{\beta}{2}\right)}{2(-a+b+c)}=\frac{ac[-b+a(2\,cos\,\beta-1)-c(2\,cos\,\beta-1)]}{2(-a+b+c)}$$

$$=\frac{ac[(-a-b+c)+2(a-c)\,cos\,\beta]}{2(-a+b+c)}$$

以上より、$(6)-(9)+(3)=\dfrac{ac[(-a-b+c)+2(a-c)\,cos\,\beta]}{2(-a+b+c)}$

この結果にさらに(2)を加えると、

$$\frac{ac[(-a-b+c)+2(a-c)\,cos\,\beta]}{2(-a+b+c)}+\left(\frac{2ac\,sin^2\frac{\beta}{2}}{-a+b+c}\right)^2$$

$$=\frac{ac(-a+b+c)[(-a-b+c)+2(a-c)\,cos\,\beta]}{2(-a+b+c)^2}+\frac{2[ac(1-cos\,\beta)]^2}{2(-a+b+c)^2}$$

$$=\frac{ac[a^2-b^2+c^2-2ac+2\,cos\,\beta(-a^2-c^2+ab-bc+2ac)+2ac-4ac\,cos\,\beta+2ac\,cos^2\,\beta]}{2(-a+b+c)^2}$$

$$=\frac{2ac\,cos\,\beta(-a^2-c^2+ab-bc+ac+ac\,cos\,\beta)}{2(-a+b+c)^2}=\frac{2ac\,cos\,\beta\,(-b^2+ab-bc+ac-ac\,cos\,\beta)}{2(-a+b+c)^2}\quad\cdots\cdots⑲$$

ここで、$(-a^2-c^2+ab-bc+ac)=-(-a+b+c)^2-(-b^2+ab-bc+ac)$ に注意すると、

$$\frac{2ac\,cos\,\beta(-a^2-c^2+ab-bc+ac+ac\,cos\,\beta)}{2(-a+b+c)^2}$$

$$=\frac{2ac\,cos\,\beta[-(-a+b+c)^2-(-b^2+ab-bc+ac)+ac\,cos\,\beta]}{2(-a+b+c)^2}$$

$$=\frac{2ac\,cos\,\beta[-(-a+b+c)^2]}{2(-a+b+c)^2}+\frac{2ac\,cos\,\beta[-(-b^2+ab-bc+ac)+ac\,cos\,\beta]}{2(-a+b+c)^2}$$

$$=-ac\,cos\,\beta-\frac{2ac\,cos\,\beta\,(-b^2+ab-bc+ac-ac\,cos\,\beta)}{2(-a+b+c)^2}$$

この第２項は⑲と同じだから次の等式が成り立つ。

$$\frac{2ac\cos\beta(-a^2-c^2+ab-bc+ac+ac\cos\beta)}{2(-a+b+c)^2}$$

$$=-ac\cos\beta-\frac{2ac\cos\beta(-a^2-c^2+ab-bc+ac+ac\cos\beta)}{2(-a+b+c)^2}$$

この等式から、$\dfrac{2ac\cos\beta(-a^2-c^2+ab-bc+ac+ac\cos\beta)}{2(-a+b+c)^2}=-\dfrac{ac\cos\beta}{2}$ が得られる。

よって、$(6)-(9)+(3)+(2)=-\dfrac{ac\cos\beta}{2}$ である。

以上の計算結果から、$(1)+(2)+(3)+(4)+(6)-(7)-(9)=0$ となり、
傍接円（Ｊ１）が九点円に外接することが証明された。

九点円と傍接円が接する点の座標は、それぞれの中心を通る直線と九点円または傍接円との交点が求める点に一致する。

九点円の中心を $(x_1,\ y_1)$，半径を r_1、傍接円の中心を $(x_3,\ y_3)$，半径を r_3 とすると、
九点円の方程式は、$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2={r_1}^2$
傍接円の方程式は、$(x-x_3)^2+(y-y_3)^2={r_3}^2$

２つの円の中心を通る直線は、$y=\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}(x-x_3)+y_3$ である。

内接円の場合と同様に解くと、その交点の座標は以下の式で与えられ、

$$x=x_3\pm\frac{y_3\,(x_1-x_3)}{\sqrt{\ (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}},\quad y=y_3\pm\frac{y_3(y_1-y_3)}{\sqrt{\ (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}}$$

このうち、２円が接する座標は⑳である。

$$x=x_3-\frac{y_3\,(x_1-x_3)}{\sqrt{\ (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}},\quad y=y_3-\frac{y_3(y_1-y_3)}{\sqrt{\ (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑳$$

傍接円が九点円に外接するための条件⑱式から、
$(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2=(r_1+r_3)^2$ を⑱に入れ、$y_3=-r_3$ を考慮すると、

$x=\dfrac{r_1x_3+r_3x_1}{r_1+r_3}$，$y=r_3\dfrac{y_1-r_1}{r_1+r_3}$ $\left(\text{または}\dfrac{r_1y_3+r_3y_1}{r_1+r_3}\right)$ ・・・・・・・・・・㉑ と表すことができる。

$x_1=\dfrac{a+2c\cos\beta}{4}$，$y_1=\dfrac{a\cos\beta-c\cos 2\beta}{4\sin\beta}$，$x_3=\dfrac{2ac\sin^2\dfrac{\beta}{2}}{-a+b+c}=\dfrac{ac(1-\cos\beta)}{-a+b+c}$，$y_3=\dfrac{-ac\sin\beta}{-a+b+c}$

$r_1=\dfrac{b}{4\sin\beta}$，$r_3=\dfrac{ac\sin\beta}{-a+b+c}$ を㉑に入れて計算すると、

$$x=\frac{\dfrac{b}{4\sin\beta}\cdot\dfrac{ac(1-\cos\beta)}{-a+b+c}+\dfrac{ac\sin\beta}{-a+b+c}\cdot\dfrac{a+2c\cos\beta}{4}}{\dfrac{b}{4\sin\beta}+\dfrac{ac\sin\beta}{-a+b+c}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{4\sin\beta\,(-a+b+c)}[\,abc(1-\cos\beta)+ac\sin^2\beta\,(a+2c\cos\beta)]}{\dfrac{1}{4\sin\beta\,(-a+b+c)}[\,b(-a+b+c)+4ac\sin^2\beta]}$$

$$=\frac{abc(1-\cos\beta)+ac\sin^2\beta\,(a+2c\cos\beta)}{b(-a+b+c)+4ac\sin^2\beta}$$

$$y=r_3\frac{y_1-r_1}{r_1+r_3}=\frac{ac\sin\beta}{-a+b+c}\cdot\frac{\dfrac{a\cos\beta-c\cos2\beta}{4\sin\beta}-\dfrac{b}{4\sin\beta}}{\dfrac{b}{4\sin\beta}+\dfrac{ac\sin\beta}{-a+b+c}}$$

$$=\frac{ac\sin\beta}{-a+b+c}\cdot\frac{(-a+b+c)\,(\,a\cos\beta-c\cos2\beta-b)}{b(-a+b+c)+4ac\sin^2\beta}=\frac{ac\sin\beta\,(\,a\cos\beta-c\cos2\beta-b)}{b(-a+b+c)+4ac\sin^2\beta}$$

$$=\frac{ac\sin\beta\,[-b(1+\cos\alpha)+2c\sin^2\beta]}{b(-a+b+c)+4ac\sin^2\beta}$$

この式は、九点円と内接円が接するフォイエルバッハ点と非常に似ており、内接円と傍接円は密接な関係にあることが分かる。

同様の方法で傍接円Ｊ₂，Ｊ₃の中心座標とその半径を求め、これまでの関連データとともに整理すると表２のようになる。

	九点円	内接円	傍接円		
			傍接円 J_1	傍接円 J_2	傍接円 J_3
X座標	$\dfrac{a+2c\cos\beta}{4}$	$\dfrac{a\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$	$\dfrac{a\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$	$a+\dfrac{b\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$	$\dfrac{c\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$
	—	$\dfrac{2ac\cos^2\frac{\beta}{2}}{a+b+c}$	$\dfrac{2ac\sin^2\frac{\beta}{2}}{-a+b+c}$	$a+\dfrac{2ab\sin^2\frac{\gamma}{2}}{a-b+c}$	$-\dfrac{2ac\sin^2\frac{\beta}{2}}{a+b-c}$
	—	$\dfrac{ac(1+\cos\beta)}{a+b+c}$	$\dfrac{ac(1-\cos\beta)}{-a+b+c}$	$a+\dfrac{ab(1-\cos\gamma)}{a-b+c}$	$-\dfrac{ac(1-\cos\beta)}{a+b-c}$
Y座標	$\dfrac{a\cos\beta-c\cos2\beta}{4\sin\beta}$	$\dfrac{ac\sin\beta}{a+b+c}$	$-\dfrac{ac\sin\beta}{-a+b+c}$	$\dfrac{ac\sin\beta}{a-b+c}$	$\dfrac{ac\sin\beta}{a+b-c}$
	$\dfrac{abc(2\sin\beta\sin\gamma-\cos\alpha)}{8S}$	$\dfrac{2S}{a+b+c}$	$-\dfrac{2S}{-a+b+c}$	$\dfrac{2S}{a-b+c}$	$\dfrac{2S}{a+b-c}$
円の半径	$\dfrac{b}{4\sin\beta}$	$\dfrac{a\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$	$\dfrac{a\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$	$\dfrac{b\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$	$\dfrac{c\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$
		$\dfrac{ac\sin\beta}{a+b+c}$	$\dfrac{ac\sin\beta}{-a+b+c}$	$\dfrac{ac\sin\beta}{a-b+c}$	$\dfrac{ac\sin\beta}{a+b-c}$
	$\dfrac{abc}{8S}$	$\dfrac{2S}{a+b+c}$	$\dfrac{2S}{-a+b+c}$	$\dfrac{2S}{a-b+c}$	$\dfrac{2S}{a+b-c}$

（表２）

さらに、九点円と内接円，傍接円が接する点の座標を求めて整理すると次の表３のとおりとなる。

	X 座 標	Y 座 標
九点円と内接円の接点	$\dfrac{abc(1+\cos\beta)-ac\sin^2\beta\,(a+2c\cos\beta)}{b(a+b+c)-4ac\sin^2\beta}$	$\dfrac{ac\sin\beta\,[b(1+\cos\alpha)-2c\sin^2\beta]}{b(a-b+c)-4ac\sin^2\beta}$
九点円と傍接円の接点	$\dfrac{abc(1-\cos\beta)+ac\sin^2\beta\,(a+2\,c\cos\beta)}{b(-a+b+c)+4ac\sin^2\beta}$	$\dfrac{ac\sin\beta\,[-b(1+\cos\alpha)+2c\sin^2\beta]}{b(-a+b+c)+4ac\sin^2\beta}$
	$\dfrac{abc(1-\cos\beta)+ac\sin^2\beta\,(a+2\,c\cos\beta)}{b(a-b+c)+4ac\sin^2\beta}$	$\dfrac{ac\sin\beta\,[b(1-\cos\alpha)+2c\sin^2\beta]}{b(a-b+c)+4ac\sin^2\beta}$
	$\dfrac{-abc(1-\cos\beta)+ac\sin^2\beta\,(a+2\,c\cos\beta)}{b(a+b-c)+4ac\sin^2\beta}$	$\dfrac{ac\sin\beta\,[b(1-\cos\alpha)+2c\sin^2\beta]}{b(a+b-c)+4ac\sin^2\beta}$

（表３）

４．九点円の中心が垂心と外心の中点であることの証明

まず外心の座標 $(x_O,\ y_O)$ について。x 座標は $\dfrac{a}{2}$、 y 座標は外接円の半径をRとすると、$\sqrt{R^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$

$$=\sqrt{\left(\frac{a}{2\sin\alpha}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}-1}=\frac{a}{2\tan\alpha}$$ より、$(x_O,\ y_O)=\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2\tan\alpha}\right)$

垂心の座標 $(x_H,\ y_H)$ について。x 座標は $c\cos\beta$ 、 y 座標は $c\cos\beta\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma\right)=\dfrac{c\cos\beta}{\tan\gamma}$ より、

$(x_H,\ y_H)=\left(c\cos\beta\,,\ \dfrac{c\cos\beta}{\tan\gamma}\right)$ と表せる。

垂心と外心の中点の x 座標 は、$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}+\ c\cos\beta\right)=\dfrac{a+2c\cos\beta}{4}$

y 座標は、$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2\tan\alpha}+\dfrac{c\cos\beta}{\tan\gamma}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a\cos\alpha}{2\sin\alpha}+\dfrac{c\cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ab\cos\alpha}{2b\sin\alpha}+\dfrac{bc\cos\beta\cos\gamma}{b\sin\gamma}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{ab\cos\alpha}{2a\sin\beta}+\frac{bc\cos\beta\cos\gamma}{c\sin\beta}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{b\cos\alpha}{2\sin\beta}+\frac{2b\cos\beta\cos\gamma}{2\sin\beta}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{c-a\cos\beta}{2\sin\beta}+\frac{2\cos\beta(a-c\cos\beta)}{2\sin\beta}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{c-a\cos\beta+2a\cos\beta-2c\cos^2\beta}{2\sin\beta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{c(1-2\cos^2\beta)+a\cos\beta}{2\sin\beta}=\frac{a\cos\beta-c\cos2\beta}{4\sin\beta}$$

以上より、 $\left(x_{\left(\frac{O+H}{2}\right)},\ y_{\left(\frac{O+H}{2}\right)}\right)=\left(\dfrac{a+2c\cos\beta}{4},\ \ \dfrac{a\cos\beta-c\cos2\beta}{4\sin\beta}\right)$ となり、九点円の中心と一致することが証明された。

５．九点円の半径が外接円の半径の半分であることの証明

幾何学的に証明する場合の難易度は？だが、三角関数と代数計算による証明は非常に簡単である。九点円の半径は既に求めたように、$r_1 = \dfrac{b}{4\sin\beta}$ であり、外接円の半径 (R) を $\sin\beta$ を用いて表せば、

正弦定理 $R = \dfrac{b}{2\sin\beta}$ から一目瞭然、$R = 2r_1$ であることが証明される。

三角関数と代数計算による証明は、式を立てひたすら計算すれば解が得られるので堅実な方法といえる。しかし、計算にかなりのテクニックが必要で、正弦定理，余弦定理や三角関数間のさまざまな関係式を組み合わせて計算を進めていかなくてはならない。それはちょうど、カギの掛かった扉を魔法のカギで次々と開けていくことに似ている。さまざまな工夫をしながら計算していくと、最後には驚くほどシンプルな式となり、求めていた結果が得られた時は格別の嬉しさがある。

例えば、点(4)(5)(6)により q を求める計算の途中、$\dfrac{b(\sin^2\gamma - \cos^2\beta)}{4\sin\beta\cos\alpha}$ という式が出てきて行き詰まってしまった。そこで、$\sin^2\gamma - \cos^2\beta = \sin^2\gamma - (1 - \sin^2\beta) = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$= -\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - \cos^2\alpha = 2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \cos^2\alpha = \cos\alpha(2\sin\beta\sin\gamma - \cos\alpha)$

$\cos\alpha[(\cos(\beta-\gamma) + \cos\alpha) - \cos\alpha] = \cos\alpha\cos(\beta-\gamma)$ と変形することで、

$q = \dfrac{b\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)}{4\sin\beta\cos\alpha} = \dfrac{b\cos(\beta-\gamma)}{4\sin\beta}$ という結果にたどり着くことができた。

九点円と傍接円は、右図に示すように芸術的な接し方で、感動すらしてしまう。よくぞ発見した！と驚嘆させられる。

３つの傍接円は、三角形の辺に接しながら、三角形外側の少しずれた位置で九点円に接している。

見方を変えれば、３つの傍接円に接する円を描けば、それが九点円になるということだ。

（２０２１．１２．０８）