１１８「円内接多角形の不思議な性質」

とても興味深い発見をした。そのきっかけは、２０１８年にアップロードされた「数学オリンピックの幾何について」という、当時灘高３年生による執筆である。数学オリンピックに挑戦する中高生向けに書かれた、幾何の問題を解くためのテクニックをまとめたものだが、その中の例題として載っていた次の問題である。

問　　題

四角形ＡＢＣＤが円に内接しており、三角形ＡＢＣ，ＢＣＤ，ＣＤＡ，ＤＡＢの内接円の半径を、それぞれ r_1， r_2， r_3， r_4 とおく。この時、 $r_1+r_3=r_2+r_4$ が成り立つ。(定理)

この定理は、任意の円に内接する多角形は、どんな三角形分割に対しても、内接円の半径の和は一定であると言い換えられる。これを証明せよ。

以下、私の証明。

Ⅰ　四角形の場合

図１の四角形ＡＢＣＤにおいて、ＡＢ＝ａ， ＢＣ＝ｂ， ＣＤ＝ｃ， ＤＡ＝ｄ， ＡＣ＝ｘ， ＢＤ＝ｙ、⊿ＡＢＣ，⊿ＢＣＤ，⊿ＣＤＡ，⊿ＤＡＢの内接円の半径を r_1， r_2， r_3， r_4、面積をそれぞれ S_1， S_2， S_3， S_4 とする。三角形の面積は、内接円の半径ｒとサブペリメータｓ（３辺の合計の１／２）の積Ｓ＝ｒｓで表せるので、$S_1=r_1s_1$，$S_2=r_2s_2$，$S_3=r_3s_3$，$S_4=r_4s_4$ である。証明するのは $r_1+r_3=r_2+r_4$ であるから、次式①が成り立つことをいえばよい。

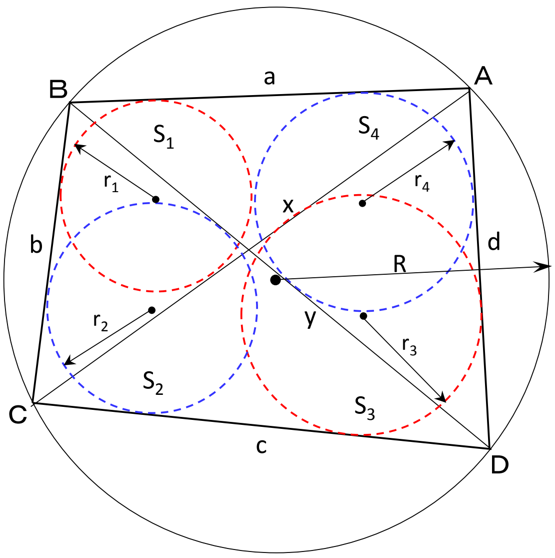


図１

$r=\dfrac{S}{s}$ より、 $\dfrac{S_1}{s_1}+\dfrac{S_3}{s_3}=\dfrac{S_2}{s_2}+\dfrac{S_4}{s_4}$ 　　…………①

外接円の半径をＲとすると、 $S_1=\dfrac{abx}{4R}$， $s_1=\dfrac{a+b+x}{2}$

S_2，S_3，S_4 も同様に $S_2=\dfrac{bcy}{4R}$， $s_2=\dfrac{b+c+y}{2}$，

$S_3=\dfrac{cdx}{4R}$， $s_3=\dfrac{c+d+x}{2}$， $S_4=\dfrac{ady}{4R}$， $s_4=\dfrac{a+d+y}{2}$ から

①は次のように表せる。

$$\frac{\frac{abx}{4R}}{\frac{a+b+x}{2}}+\frac{\frac{cdx}{4R}}{\frac{c+d+x}{2}}=\frac{\frac{bcy}{4R}}{\frac{b+c+y}{2}}+\frac{\frac{ady}{4R}}{\frac{a+d+y}{2}}$$

整理すると、 $x\left[\dfrac{ab}{a+b+x}+\dfrac{cd}{c+d+x}\right]=y\left[\dfrac{bc}{b+c+y}+\dfrac{ad}{a+d+y}\right]$

よって、 $x\left[\dfrac{ab}{a+b+x}+\dfrac{cd}{c+d+x}\right]-y\left[\dfrac{bc}{b+c+y}+\dfrac{ad}{a+d+y}\right]=0$ ……②を証明すればよい。

②を通分して整理すると、

$[(ab+cd)x^2y^2+(a+b+c+d)(ab+cd)x^2y$

$+(a+d)(b+c)(ab+cd)x^2+\{ab(c+d)+cd(a+b)\}xy^2$

$\underline{+(a+b+c+d)\,\{ab(c+d)+cd(a+b)\}xy}$

$+(a+d)(b+c)\{ab(c+d)+cd(a+b)\}x]$

$-[(ad+bc)x^2y^2+(a+b+c+d)(ad+bc)xy^2+(a+b)(c+d)(ad+bc)y^2$

$\{ab(c+d)+cd(a+b)\}x^2y\underline{+(a+b+c+d)\{ab(c+d)+cd(a+b)\}xy}$

$+(a+b)(c+d)\{ab(c+d)+cd(a+b)\}y]$

上式アンダーライン部 $(a+b+c+d)\{ab(c+d)+cd(a+b)\}xy$ は消去されるので、
$\{ab(c+d)+cd(a+b)\}=k$ とおき、書き直すと次式となる。

$$[(ab+cd)x^2y^2+(a+b+c+d)(ab+cd)x^2y+(a+d)(b+c)(ab+cd)x^2+kxy^2+k(a+d)(b+c)x]$$
$$-[(ad+bc)x^2y^2+(a+b+c+d)(ad+bc)xy^2+(a+b)(c+d)(ad+bc)y^2+kx^2y+k(a+b)(c+d)y]$$

………………③

③ 式について、以下のように各項に番号を付けて計算を進める。

$$[\underbrace{\boxed{(ab+cd)x^2y^2}}_{(1)}+\underbrace{\boxed{(a+b+c+d)(ab+cd)x^2y}}_{(2)}+\underbrace{\boxed{(a+d)(b+c)(ab+cd)x^2}}_{(3)}+\underbrace{\boxed{kxy^2}}_{(4)}+\underbrace{\boxed{k(a+d)(b+c)x}}_{(5)}]$$
$$-[\underbrace{\boxed{(ad+bc)x^2y^2}}_{(6)}+\underbrace{\boxed{(a+b+c+d)(ad+bc)xy^2}}_{(7}+\underbrace{\boxed{(a+b)(c+d)(ad+bc)y^2}}_{(8)}+\underbrace{\boxed{kx^2y}}_{(9)}+\underbrace{\boxed{k(a+b)(c+d)y}}_{(10)}]$$

図１において、トレミーの定理より $xy=ac+bd$ が成り立つ。
さらに、「６９ 幾何学超絶難問その１」で示したように、円に内接する四角形について次式が成り立つ。

$$x=\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}},\quad y=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

（A）［(1)+(3)］－［(6)＋(8)］を計算すると、

$$(ab+cd)x^2y^2+(a+d)(b+c)(ab+cd)x^2-(ad+bc)x^2y^2-(a+b)(c+d)(ad+bc)y^2$$
$$=(ab+cd)(ac+bd)^2+(a+d)(b+c)(ad+bc)(ac+bd)$$
$$-(ad+bc)(ac+bd)^2-(a+b)(c+d)(ab+cd)(ac+bd)$$
$$=(ac+bd)[\underline{(ab+cd)(ac+bd)-(ad+bc)(ac+bd)+(a+d)(b+c)(ad+bc)-(a+b)(c+d)(ab+cd)}]$$

$[\underline{\qquad\quad}]$内は 0 となるので、

$$(ab+cd)x^2y^2+(a+d)(b+c)(ab+cd)x^2-(ad+bc)x^2y^2-(a+b)(c+d)(ad+bc)y^2=0$$

（B）(2)－(7)を計算すると、

$$(a+b+c+d)(ab+cd)x^2y-(a+b+c+d)(ad+bc)xy^2$$
$$=(a+b+c+d)xy\left[(ab+cd)\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}-(ad+bc)\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}\right]$$
$$=(a+b+c+d)xy\underline{\left[\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}-\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}\right]}=0$$

[　　　　]内は 0 となるので、$x^2y-(a+b+c+d)(ad+bc)xy^2=0$

（C）［(4)＋(5)］－［(9)＋(10)］を計算すると、

$$kxy^2+k(a+d)(b+c)x-kx^2y-k(a+b)(c+d)y$$
$$=[kxy^2-ky(a+b)(c+d)]-[kx^2y-kx(a+d)(b+c)]$$
$$=ky[xy-(a+b)(c+d)]-kx[xy-(a+d)(b+c)]=-ky[ad+bc]+kx[ab+cd]$$
$$=-k\left[(ad+bc)\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}-(ab+cd)\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}\right]$$
$$=-k\left[\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}-\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}\right]=0$$

[　　　　]内は 0 となるので、$kxy^2+k(a+d)(b+c)x-kx^2y-k(a+b)(c+d)x=0$

（A）（B）（C）より、$r_1+r_3=r_2+r_4$ が証明された。

Ⅱ 多角形の場合

〔１〕 五角形の場合

五角形は円に内接する３つの三角形に分割されるが、その分割の仕方は５通りである。図２－１～２－５に示すとおり、五角形を円に内接する三角形と四角形に分割し（実線）、さらに四角形を２つの三角形に分割する（点線）。

例えば図２－１について、五角形ＡＢＣＤＥを三角形ＡＢＣと四角形ＡＣＤＥに分割し、さらにそれを⊿ＡＣＤと⊿ＡＤＥに分割することで、五角形は円に内接する３つの三角形に分割される。

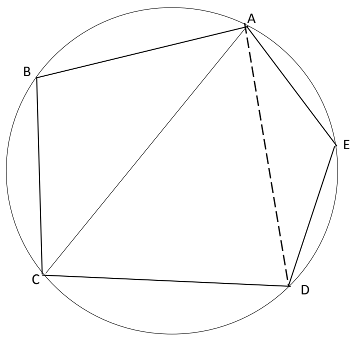


図２－１

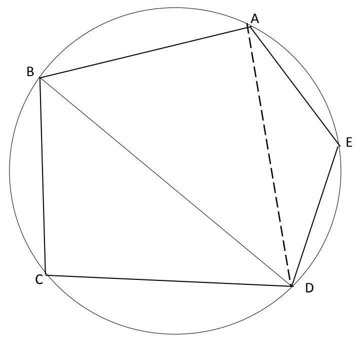


図２－２

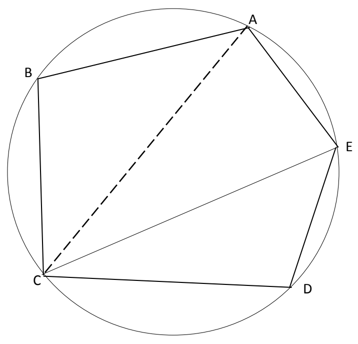


図２－３

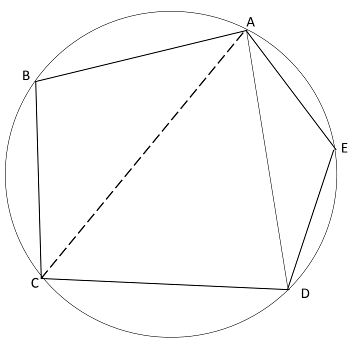


図２－４

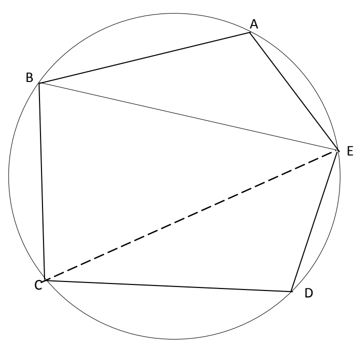


図２－５

例えば、四角形ＡＣＤＥを図３－１のように ⊿ＡＣＥと⊿ＣＤＥに、図３－２のように⊿ＡＣＤと⊿ＡＤＥに分割した場合について。五角形を３つの三角形に分割した時にできる三角形の内接円の半径の和は図３－１では$r_1+r_3+r_5$、図３－２では$r_2+r_4+r_5$となり、⊿ＡＢＣの内接円の半径r_5は共通である。ここで、Ｉ　四角形の場合で証明したように$r_1+r_3=r_2+r_4$だから、$r_1+r_3+r_5=r_2+r_4+r_5$となり内接円の半径の和は等しい。

以上のことは、図２－２～図２－５のケースすべてに共通なので、五角形の内接円の半径の和は一定である。

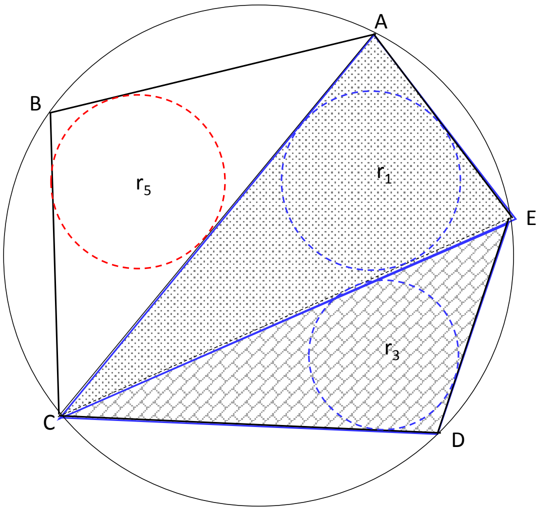


図３－１

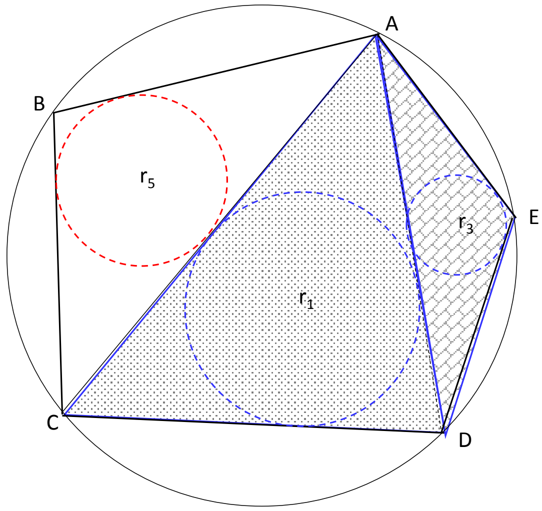


図３－２

〔２〕　六角形以上の多角形の場合

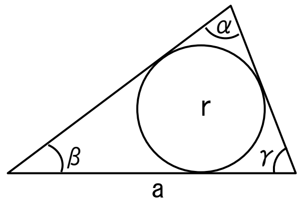
六角形を円に内接する三角形と五角形に分けるときの分け方は６通り、五角形を３つの三角形に分けるときの分け方は５通りである。五角形については〔１〕で示した通り、$r_1+r_3+r_5=r_2+r_4+r_5$の関係が成り立ち、最初の三角形の内接円の半径をr_6とすると、r_6は共通であるから、$r_1+r_3+r_5+r_6=r_2+r_4+r_5+r_6$という関係が成り立ち、六角形の内接円の半径の和は一定であることが言える。

六角形を円に内接する４つの三角形に分ける分け方は６×５＝３０通りとなるが、共通に同様の考え方が成り立つ。

ｎ角形を円に内接する四角形と三角形に分割するとき、ｎ角形の内角の和（ｎ－２）πから、偶数角形の場合は、$\dfrac{(n-2)\pi}{2\pi}=\dfrac{n-2}{2}$個の四角形か、$\dfrac{n-4}{2}$個 の四角形と２個の三角形ができ、奇数角形の場合は、$\dfrac{n-3}{2}$個の四角形と１個の三角形ができ、そのいずれにもこれまでの考え方が共通して適用できる。従って、円に内接する任意の多角形は、円に内接するどんな三角形分割に対しても、内接円の半径の和は一定であることが証明された。

Ⅲ 円に内接する「**正多角形**」を、円に内接する三角形に分割した時、それぞれの三角形の内接円の半径の和はどうなるだろうか？

前の証明で、内接円の半径の合計は分割の仕方に関係なく不変なので、分割は１通りだけを考えれば他はすべて同じである。



右図に示すように三角形の内接円の半径ｒは、１辺と３つの角によって、

$$r = a\frac{sin\frac{\beta}{2}sin\frac{\gamma}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots④$$

と表すことができる。

図４に示すように、半径ａの円に内接する正ｎ角形を考える。

正ｎ角形の一辺の長さは $2a\,sin\frac{\pi}{n}$、

その辺に対応する角度は $\frac{2\pi}{n}$ である。

正ｎ角形ＡＢＣＤ,,, Ｎを◿ＡＢＣ，ＡＣＤ，ＡＤＥ，ＡＥＦ,,,,と円に内接する三角形に分割していくと、ｎ－２個の三角形に分割される。それぞれの三角形の内接円の半径を求めるために、１辺と３つの角をまとめたのが表１である。

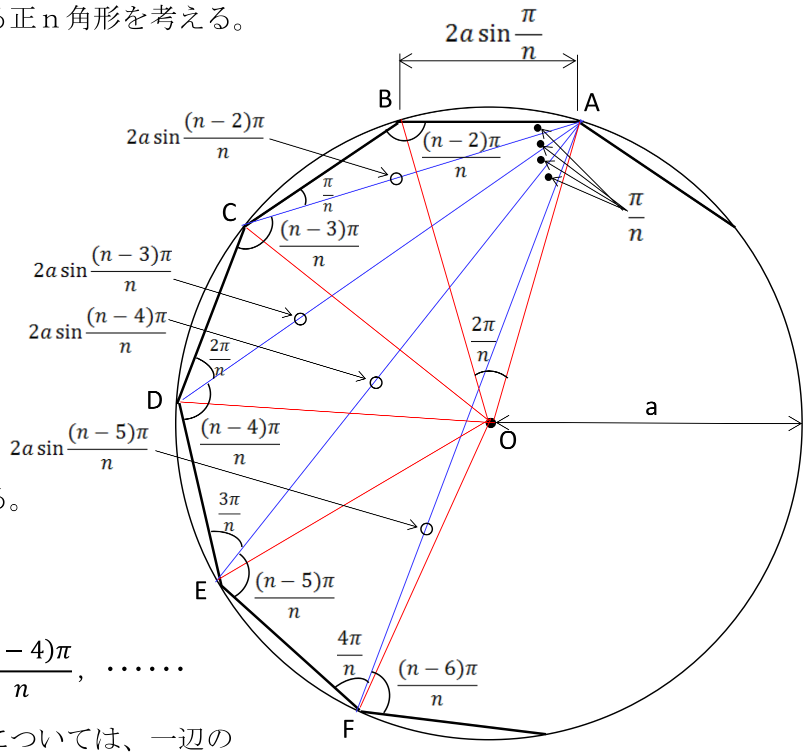


図４

辺ＡＣ，ＡＤ，ＡＥ････の長さは、正弦定理を用いて、

$$2a\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\ ,\ 2a\sin\frac{(n-3)\pi}{n},\ 2a\sin\frac{(n-4)\pi}{n},\ \cdots\cdots$$

と求めることができる。ｋ番目の三角形については、一辺の長さ $2a\sin\frac{[n-(k+1)]\pi}{n}$，３つの角度は $\frac{\pi}{n}$，$\frac{k\pi}{n}$，$\frac{[n-(k+1)]\pi}{n}$ である。

三角形	辺の長さ		角度１		角度２		角度３	
1	ＡＣ	$2a\sin\frac{(n-2)\pi}{n}$	ＢＡＣ	$\frac{\pi}{n}$	ＢＣＡ	$\frac{\pi}{n}$	ＡＢＣ	$\frac{(n-2)\pi}{n}$
2	ＡＤ	$2a\sin\frac{(n-3)\pi}{n}$	ＣＡＤ	$\frac{\pi}{n}$	ＣＤＡ	$\frac{2\pi}{n}$	ＡＣＤ	$\frac{(n-3)\pi}{n}$
3	ＡＥ	$2a\sin\frac{(n-4)\pi}{n}$	ＤＡＥ	$\frac{\pi}{n}$	ＤＥＡ	$\frac{3\pi}{n}$	ＡＤＥ	$\frac{(n-4)\pi}{n}$
4	ＡＦ	$2a\sin\frac{(n-5)\pi}{n}$	ＥＡＦ	$\frac{\pi}{n}$	ＥＦＡ	$\frac{4\pi}{n}$	ＡＥＦ	$\frac{(n-5)\pi}{n}$
……		…………		……		……		……
k		$2a\sin\frac{[n-(k+1)]\pi}{n}$		$\frac{\pi}{n}$		$\frac{k\pi}{n}$		$\frac{[n-(k+1)]\pi}{n}$

表１

以上より、各三角形の内接円の半径を r_1, r_2, r_3, $r_4 \cdots\cdots$, r_k とすると、それぞれ次式で表される。

$$r_1 = 2a\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{(n-2)\pi}{2n}},\quad r_2 = 2a\sin\frac{(n-3)\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}}{\cos\frac{(n-3)\pi}{2n}}$$

$$r_3 = 2a\,sin\frac{(n-4)\pi}{n}\cdot\frac{sin\frac{\pi}{2n}\,sin\frac{3\pi}{2n}}{cos\frac{(n-4)\pi}{2n}},\quad r_4 = 2a\,sin\frac{(n-5)\pi}{n}\cdot\frac{sin\frac{\pi}{2n}\,sin\frac{4\pi}{2n}}{cos\frac{(n-5)\pi}{2n}}\quad \cdots\cdots\cdots,$$

$$r_k = 2a\,sin\frac{[n-(k+1)]\pi}{n}\cdot\frac{sin\frac{\pi}{2n}\,sin\frac{k\pi}{2n}}{cos\frac{[n-(k+1)]\pi}{2n}}$$

よって、円に内接する正ｎ角形を、円に内接する三角形に分割した時の、それぞれの三角形の内接円の半径の合計は次の式で表される。

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \cdots\cdots + r_n = 2a\,sin\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[sin\frac{[n-(k+1)]\pi}{n}\cdot\frac{sin\frac{k\pi}{2n}}{cos\frac{[n-(k+1)]\pi}{2n}}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤は倍角の公式を使うと次のように変形できる。 $4a\,sin\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[sin\frac{[n-(k+1)]\pi}{2n}\cdot sin\frac{k\pi}{2n}\right]$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$⑥

ここから興味深い発見について書いていく。

円の半径を $a=1$ とした場合について、正３角形から正１０角形までを計算すると表２のようになった。

	3	4	5	6	7	8	9	10
r_1	0.50000	0.41421	0.30902	0.23205	0.17845	0.14065	0.11334	0.09310
r_2		0.41421	0.42705	0.36603	0.30194	0.24830	0.20574	0.17229
r_3			0.30902	0.36603	0.34601	0.30656	0.26604	0.22982
r_4				0.23205	0.30194	0.30656	0.28699	0.26007
r_5					0.17845	0.24830	0.26604	0.26007
r_6						0.14065	0.20574	0.22982
r_7							0.11334	0.17229
r_8								0.09310
合 計	0.50000	0.82843	1.04508	1.19615	1.30678	1.39104	1.45723	1.51057

表２

正ｎ角形を図４のように分割していくと、円の中心線に対して対称となるので、

偶数角形では、 $r_1 = r_n$, $r_2 = r_{n-1}$, $r_3 = r_{n-2}\cdots\cdots\cdots$

奇数角形では、$r_1 = r_{n-1}$, $r_2 = r_{n-2}$, $r_3 = r_{n-3}\cdots\cdots\cdots$という関係になっている。

そして、内接円の半径の合計は徐々に増加していく。

一般の多角形と正多角形を比較すると、いくつかの例を確認したところ、辺の長さの合計が同じであれば、分割してできた三角形の面積の合計は正多角形が最も大きく、内接円の半径の合計も正多角形の場合が最大となる。

Excel を使って、さらに正１００角形までを計算すると「表３」、グラフを描くと「図５」のとおりと

なった。

		21	1.76545	**41**	1.87970	**61**	1.91912	**81**	1.93908
		22	1.77607	**42**	1.88256	**62**	1.92042	**82**	1.93983
3	0.50000	**23**	1.78578	**43**	1.88529	**63**	1.92169	**83**	1.94055
4	0.82843	**24**	1.79468	**44**	1.88789	**64**	1.92291	**84**	1.94126
5	1.04508	**25**	1.80287	**45**	1.89038	**65**	1.92409	**85**	1.94195
6	1.19615	**26**	1.81043	**46**	1.89276	**66**	1.92524	**86**	1.94262
7	1.30678	**27**	1.81744	**47**	1.89504	**67**	1.92636	**87**	1.94328
8	1.39104	**28**	1.82394	**48**	1.89723	**68**	1.92744	**88**	1.94393
9	1.45723	**29**	1.83000	**49**	1.89932	**69**	1.92849	**89**	1.94456
10	1.51057	**30**	1.83566	**50**	1.90134	**70**	1.92951	**90**	1.94517
11	1.55442	**31**	1.84095	**51**	1.90327	**71**	1.93051	**91**	1.94578
12	1.59111	**32**	1.84591	**52**	1.90513	**72**	1.93147	**92**	1.94637
13	1.62224	**33**	1.85057	**53**	1.90692	**73**	1.93241	**93**	1.94694
14	1.64899	**34**	1.85496	**54**	1.90864	**74**	1.93332	**94**	1.94751
15	1.67221	**35**	1.85910	**55**	1.91030	**75**	1.93421	**95**	1.94806
16	1.69256	**36**	1.86301	**56**	1.91190	**76**	1.93508	**96**	1.94860
17	1.71054	**37**	1.86671	**57**	1.91345	**77**	1.93592	**97**	1.94913
18	1.72654	**38**	1.87021	**58**	1.91494	**78**	1.93674	**98**	1.94965
19	1.74086	**39**	1.87354	**59**	1.91638	**79**	1.93754	**99**	1.95016
20	1.75377	**40**	1.87669	**60**	1.91777	**80**	1.93832	**100**	1.95066

表３

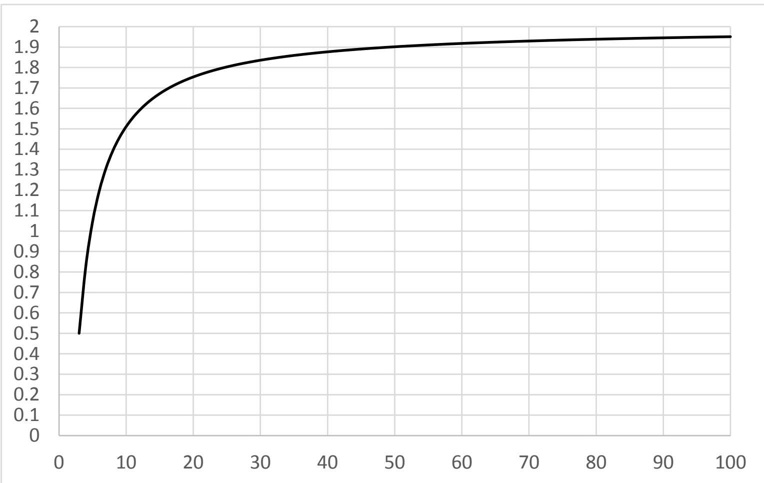


図５

図５を見ると、ｎが増えるに従ってｒの合計は徐々に増加し２に近づいている。
さらにｎを大きくしていくとどうなるだろうか？これ以上 Excel での計算は難しいので、Wolfram Alpha で結果を求めた。

⑥式、$\sum$ の前の $4\,sin\dfrac{\pi}{2n}$ は n によって決まる定数であるから、後で掛け算する。

■　ｎ＝100 のとき

$$\sum_{k=1}^{100}\sin\left(\frac{1}{200}\,(100-(k+1))\,\pi\right)\sin\left(\frac{k\,\pi}{200}\right)\approx$$

31.031224470097427829313043961914308477 78

より、$31.03122447 \times 4\,sin\dfrac{\pi}{2 \times 100} = \underline{1.94966916}$

■　n = 10000 のとき

$$\sum_{k=1}^{10000} \sin\left(\frac{(10000-(k+1))\pi}{20000}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{20000}\right) \approx$$
$$3182.31331968807648166475193891056021821 1$$

より、$3182.31331968 \times 4\,sin\dfrac{\pi}{2 \times 10000} = \underline{1.99950642}$

■　n = 1000000 のとき

⑥式では計算結果が出ず、さらに積→和の公式で以下のように変形すると、

$$4\,sin\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[sin\frac{[n-(k+1)]\pi}{2n} \cdot sin\frac{k\pi}{2n}\right] = 2\,sin\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[cos\frac{[n-(2k+1)]\pi}{2n} - cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right]$$

Σの第２項は定数となり、$n = 1000000$ で $cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n} = 1.5708 \times 10^{-6}$ であるから

第２項は $2\,sin\dfrac{\pi}{2n} \times 1.5708 \times 10^{-6} \times 1000000 = 0.00493$ となり第１項に対して無視できる。

第１項を計算すると、

$$\sum_{k=1}^{1000000} \cos\left(\frac{(1000000-(2k+1))\pi}{2000000}\right) \approx$$
$$636619.77236470154980974577697880641311795760682491869704482482367278904958408981136416124942056349 48$$

より、$636619.7723 \times 2\,sin\dfrac{\pi}{2 \times 1000000} = \underline{1.99999999978686}$

以上の計算から、$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \cdots\cdots + r_\infty \to 4a\,sin\dfrac{\pi}{2n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[sin\dfrac{[n-(k+1)]\pi}{2n} \cdot sin\dfrac{k\pi}{2n}\right]$

は「２」に収束すると思われるが、この証明が何日考えてもできなかった。

そこで、Wolfram Alpha に入れてみたら、呆気なく「２」という極限値が得られ予想と一致した。

入力　$\lim[n\to\infty]\Sigma[k=1,n]4*\sin\left(\dfrac{pi}{(2*n)}\right)*\sin\left((n-(k+1))*\dfrac{pi}{(2*n)}\right)*\sin\left(k*\dfrac{pi}{(2*n)}\right)$

出力　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} 4\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\dfrac{(n-(k+1))\pi}{2n}\right)\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)\right) = 2$

『円に内接する多角形の問題』は、和算家「丸山良寛」が寛政１２年（西暦１８００年）に奉納した「算額」が起源である。もとは“円に内接する四角形”についての内容だったが、その考え方は“円に内接する一般の多角形”においても成り立つものだった。

明治時代に入り、多角形に拡張したものが日本人により海外専門誌に紹介され、『JapaneseTheorem』（日本人の定理）として広まったものである。

【定理】『円に内接する任意の多角形において、１頂点を通る弦で分けられるすべての三角形の内接

円の半径の和は、どの頂点に関しても等しく一定である』
　とてもシンプルで美しい定理である。
また、『半径１の円に内接する正ｎ角形の１つの頂点から、他の全ての頂点を結ぶ線の長さを全部かけ合わせた値はｎに等しい』という驚きの定理もある。

今回私が導いたのは、**『円に内接する正ｎ角形において、１頂点を通る弦で分けられるすべての三角形の内接円の半径の総和は、ｎを限りなく無限に近づけていくと、その円の直径に一致する』**というもので、新しい発見と考える。（２０２１．１２．３１）