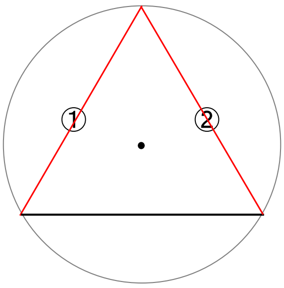
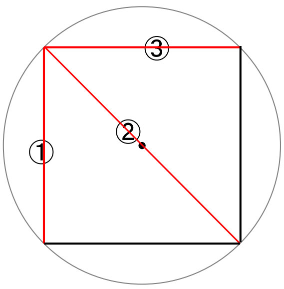
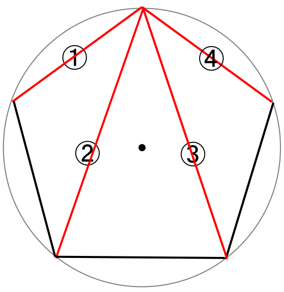
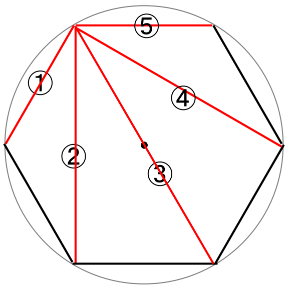
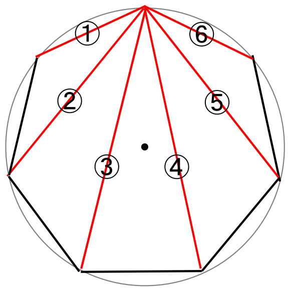
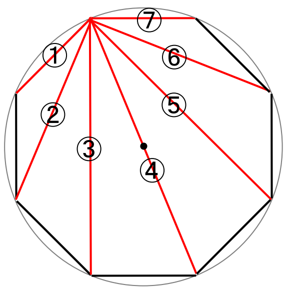
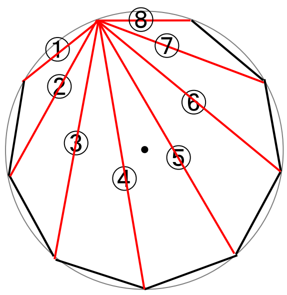
１１９「円内接多角形の不思議な性質（２）」

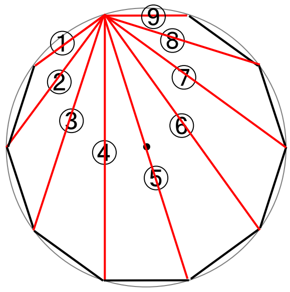
前項１１８「円内接多角形の不思議な性質」の最後に触れた『半径１の円に内接する正ｎ角形の１つの頂点から、他の全ての頂点を結ぶ線の長さを全部かけ合わせた値はｎに等しい』という定理について、とても興味深い性質なので考えてみた。

表１に示すように、三角形，四角形，五角形････と十角形まで計算してみると、確かに正ｎ角形について頂点を結ぶ線を全てかけ合わせるとｎに一致する。とても不思議だ！

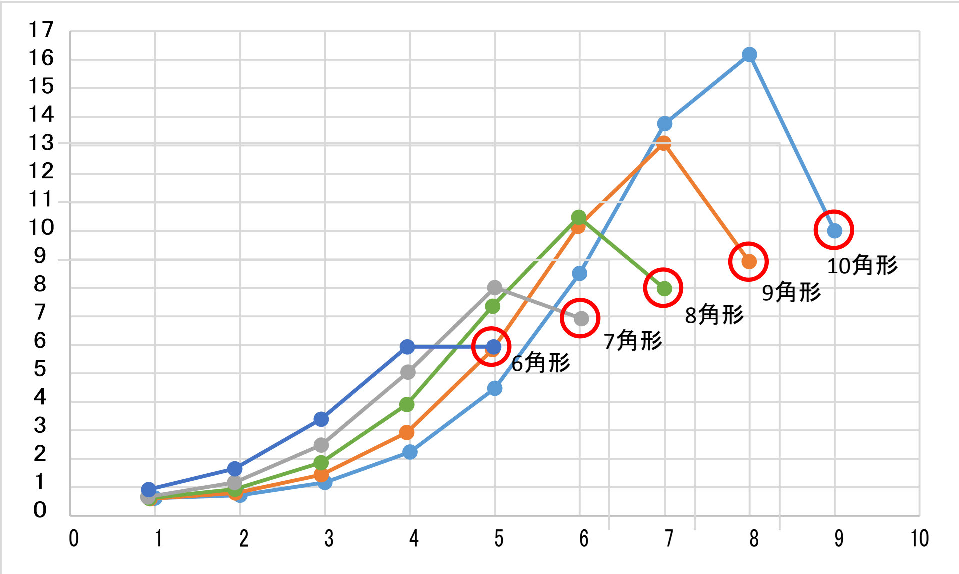
（表　１）

図　形		辺の長さ	辺の長さの積	結　果
三角形		① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$	3
四角形		① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\times 2\times\sqrt{2}=4$	4
五角形		① $2\,sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ ② $2\,sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ ③ $2\,sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ ④ $2\,sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)^2\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)^2=5$	5
六角形		① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 1	$1\times\sqrt{3}\times 2\times\sqrt{3}\times 1=6$	6

七角形		① $2\,sin\dfrac{\pi}{7}$ ② $2\,sin\dfrac{2\pi}{7}$ ③ $2\,sin\dfrac{3\pi}{7}$ ④ $2\,sin\dfrac{4\pi}{7}\left(=2\,sin\dfrac{3\pi}{7}\right)$ ⑤ $2\,sin\dfrac{5\pi}{7}\left(=2\,sin\dfrac{2\pi}{7}\right)$ ⑥ $2\,sin\dfrac{6\pi}{7}\left(=2\,sin\dfrac{\pi}{7}\right)$	$\prod_{k=1}^{7-1} 2\,sin\dfrac{k\pi}{7}=2^{7-1}\prod_{k=1}^{7-1} sin\dfrac{k\pi}{7}$ $\prod_{k=1}^{7-1} sin\dfrac{k\pi}{7}=2^{1-7}\cdot 7$ から、 $\prod_{k=1}^{7-1} 2\,sin\dfrac{k\pi}{7}=2^{1-7}\cdot 7\cdot 2^{7-1}=7$ （上式については後述する）	7
八角形		① $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2-\sqrt{2}}\,(1+\sqrt{2})$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{2-\sqrt{2}}\,(1+\sqrt{2})$ ⑥ $\sqrt{2}$ ⑦ $\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2\times(\sqrt{2})^2$ $\times\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\,(1+\sqrt{2})\right)^2\times 2=8$	8
九角形		① $2\,sin\dfrac{\pi}{9}$　② $2\,sin\dfrac{2\pi}{9}$ ③ $2\,sin\dfrac{3\pi}{9}$　④ $2\,sin\dfrac{4\pi}{9}$ ⑤ $2\,sin\dfrac{5\pi}{9}\left(=2\,sin\dfrac{4\pi}{9}\right)$ ⑥ $2\,sin\dfrac{6\pi}{9}\left(=2\,sin\dfrac{3\pi}{9}\right)$ ⑦ $2\,sin\dfrac{7\pi}{9}\left(=2\,sin\dfrac{2\pi}{9}\right)$ ⑧ $2\,sin\dfrac{8\pi}{9}\left(=2\,sin\dfrac{\pi}{9}\right)$	$\prod_{k=1}^{9-1} 2\,sin\dfrac{k\pi}{9}=2^{9-1}\prod_{k=1}^{7-1} sin\dfrac{k\pi}{9}$ $\prod_{k=1}^{9-1} sin\dfrac{k\pi}{9}=2^{1-9}\cdot 9$ から、 $\prod_{k=1}^{9-1} 2\,sin\dfrac{k\pi}{9}=2^{1-9}\cdot 9\cdot 2^{9-1}=9$ （上式については後述する）	9

十 角 形		① $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$ ⑤ 2 ⑥ $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$ ⑦ $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ⑧ $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$ ⑨ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\right)^2 \times 2$ $\times \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\right)^2$ $= 10$	10

六角形から十角形について、「辺の長さ」の積の値の変化についてグラフにすると右のようになる。値は徐々に大きくなり“ｎ”を大きく超えて、最終的にｎに一致していることがわかる。



この定理の証明はそれほど難しくない。
前項　１１８「円内接多角形の不思議な性質」において、正ｎ角形の各頂点を結ぶ線の長さは次のとおり求めているので、それをかけ合わせればよい。

$$2a\,sin\frac{[n-(k+1)]\pi}{n} = 2a\,sin\left[\pi - \frac{(k+1)\pi}{n}\right] = 2a\,sin\frac{(k+1)\pi}{n}$$

と変形し、初項が $2a\,sin\frac{\pi}{n}$ であることに注意して、半径ａ＝１として $\prod$ （総乗）の式で書くと、

正ｎ角形の頂点を結ぶ線の長さの積 $= \prod_{k=1}^{n-1} 2\,sin\frac{k\pi}{n} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1} sin\frac{k\pi}{n}$ と表すことができる。

Wolfram Alpha で計算すると以下のとおり解答が得られる。（正七角形，正九角形はこの式を使用）

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(k\,\frac{\pi}{n}\right) = 2^{1-n}\,n \quad \rightarrow 2^{1-n}\cdot n\cdot 2^{n-1} = n$$

証明は複素数を使って明快に行うことができる。

方程式 $x^n - 1 = 0$ の根を ω とすると、ω_1，ω_2，・・・・，ω_n は半径１の円（単位円）をｎ等分した複素数の点として$\omega_k = cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\,sin\dfrac{2k\pi}{n}$ ・・・・・・・・・・・・・① と表すことができる。

$x^n - 1$ は２種類に因数分解でき、ド・モアブルの定理【$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$】より

$\omega_k = \omega^k$ なので次式を得る。

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots\cdots + x + 1\right) = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots\cdots(x-\omega^{n-1}) \quad \cdots\cdots\cdots②$$

$x \neq 1$ として、両辺を $x - 1$ で割ると、

$\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots\cdots + x + 1\right) = (x-\omega)(x-\omega^2)\cdots\cdots(x-\omega^{n-1})$ が成り立つ。

上式は$(x-1)$ の因子を含まないので $x = 1$ を入れると、

$$1 + 1 + 1 + \cdots\cdots = n = (1-\omega)(1-\omega^2)\cdots\cdots(1-\omega^{n-1}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

図１に示す複素平面の点Ａ（１，０）から正ｎ角形の各頂点への長さは、正の値なので$\left|1-\omega^k\right|$ で表し、③と組み合わせると、

$$n = |1-\omega||1-\omega^2|\cdots\cdots|1-\omega^{n-1}| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots④$$

$\left|1-\omega^k\right| = \sqrt{(1-\omega^k)^2}$ として①より、

$\omega_k = \omega^k = cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\,sin\dfrac{2k\pi}{n}$ だから、

$$\sqrt{(1-\omega^k)^2} = \sqrt{\left(1 - cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \left(sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - 2cos\frac{2k\pi}{n} + \left(cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \left(sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2 - 2cos\frac{2k\pi}{n}} = \sqrt{2 - 2\left(1 - 2\,sin^2\frac{k\pi}{n}\right)}$$

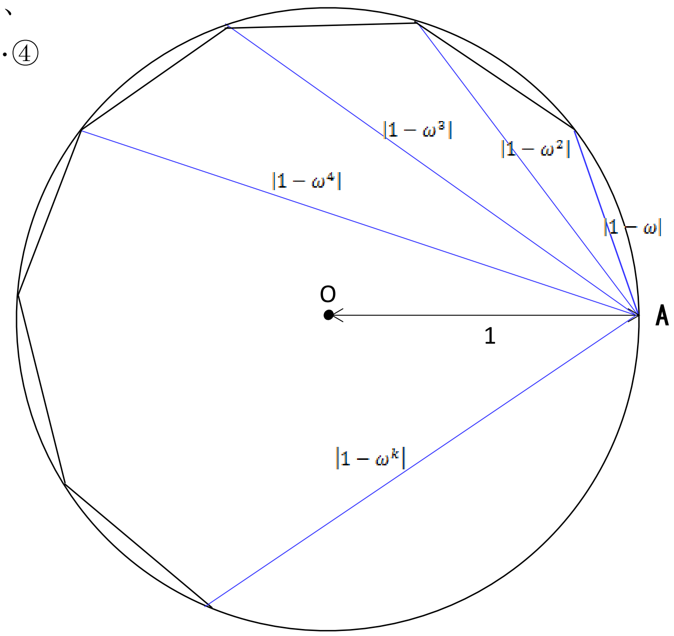


図１

$= \sqrt{4\,sin^2\dfrac{k\pi}{n}} = 2\,sin\dfrac{k\pi}{n}$ 従って④より、$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} 2\,sin\frac{k\pi}{n} = n$ が導かれた。（証明終わり）

これは、某大学の理学系分野の大学院入試問題として出題されたとのことだが、一体誰がどんな経緯で発見した定理なのだろうか？

これに類したもので、正七角形において $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AD}$ が成り立つ、という定理もある。これも不思議な特徴だと思う。（図２）

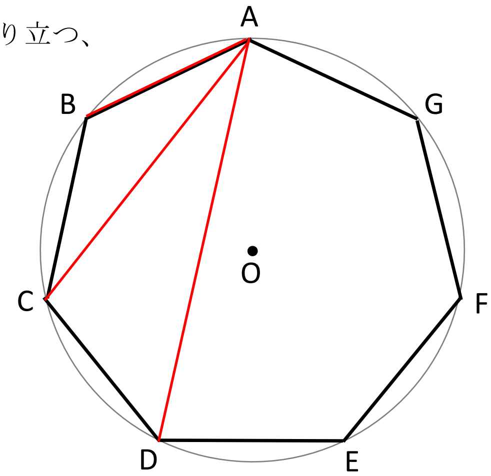


図２

正ｎ角形の各頂点を結ぶ線の長さは前述のとおり、

$2a\,sin\left[\pi-\dfrac{(k+1)\pi}{n}\right]$ であるから $k=0$，１，２として、

$$AB=2a\,sin\frac{6\pi}{7},\ \ AC=2a\,sin\frac{5\pi}{7},\ \ AD=2a\,sin\frac{4\pi}{7}$$

$sin\dfrac{6\pi}{7}=sin\left(\pi-\dfrac{6\pi}{7}\right)=sin\dfrac{\pi}{7}$，同様に$sin\dfrac{5\pi}{7}=sin\dfrac{2\pi}{7}$，

$sin\dfrac{4\pi}{7}=sin\dfrac{3\pi}{7}$ から、共通の $2a$ を消去して、

$\dfrac{1}{sin\frac{\pi}{7}}=\dfrac{1}{sin\frac{2\pi}{7}}+\dfrac{1}{sin\frac{3\pi}{7}}$ から、$\dfrac{1}{sin\frac{2\pi}{7}}+\dfrac{1}{sin\frac{3\pi}{7}}-\dfrac{1}{sin\frac{\pi}{7}}=0$ を証明すればよい。左辺を計算すると、

$\dfrac{1}{sin\frac{\pi}{7}}\cdot\dfrac{1}{sin\frac{2\pi}{7}}\cdot\dfrac{1}{sin\frac{3\pi}{7}}\left(sin\dfrac{\pi}{7}sin\dfrac{3\pi}{7}+sin\dfrac{\pi}{7}sin\dfrac{2\pi}{7}-sin\dfrac{2\pi}{7}sin\dfrac{3\pi}{7}\right)$ 　(　　)内を計算すると、

$$sin\frac{\pi}{7}sin\frac{3\pi}{7}+sin\frac{\pi}{7}sin\frac{2\pi}{7}-sin\frac{2\pi}{7}sin\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}\left[\left(cos\frac{2\pi}{7}-cos\frac{4\pi}{7}\right)+\left(cos\frac{\pi}{7}-cos\frac{3\pi}{7}\right)-\left(cos\frac{\pi}{7}-cos\frac{5\pi}{7}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(cos\frac{2\pi}{7}+cos\frac{5\pi}{7}\right)-\left(cos\frac{3\pi}{7}+cos\frac{4\pi}{7}\right)\right]=\left(cos\frac{\pi}{2}\cdot cos\frac{3\pi}{14}\right)-\left(cos\frac{\pi}{2}\cdot cos\frac{\pi}{14}\right)=cos\frac{\pi}{2}\left(cos\frac{3\pi}{14}-cos\frac{\pi}{14}\right)$$

$cos\dfrac{\pi}{2}=0$ だから (　　)内は０となり、$\dfrac{1}{sin\frac{2\pi}{7}}+\dfrac{1}{sin\frac{3\pi}{7}}-\dfrac{1}{sin\frac{\pi}{7}}=0$ が証明された。

これが成り立つのは正七角形だけだろうか？ 正ｎ角形の場合で同様に考えてみると、

$\dfrac{1}{sin\frac{2\pi}{n}}+\dfrac{1}{sin\frac{3\pi}{n}}-\dfrac{1}{sin\frac{\pi}{n}}=0$ が成り立つｎを求めれば良い。

$\dfrac{1}{sin\frac{\pi}{n}}\cdot\dfrac{1}{sin\frac{2\pi}{n}}\cdot\dfrac{1}{sin\frac{3\pi}{n}}\left(sin\dfrac{\pi}{n}sin\dfrac{3\pi}{n}+sin\dfrac{\pi}{n}sin\dfrac{2\pi}{n}-sin\dfrac{2\pi}{n}sin\dfrac{3\pi}{n}\right)$ 　同様に (　　)内を計算すると、

$$sin\frac{\pi}{n}sin\frac{3\pi}{n}+sin\frac{\pi}{n}sin\frac{2\pi}{n}-sin\frac{2\pi}{n}sin\frac{3\pi}{n}=\frac{1}{2}\left[\left(cos\frac{2\pi}{n}-cos\frac{4\pi}{n}\right)+\left(cos\frac{\pi}{n}-cos\frac{3\pi}{n}\right)-\left(cos\frac{\pi}{n}-cos\frac{5\pi}{n}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(cos\frac{2\pi}{n}+cos\frac{5\pi}{n}\right)-\left(cos\frac{3\pi}{n}+cos\frac{4\pi}{n}\right)\right]=\left(cos\frac{7\pi}{2n}\cdot cos\frac{3\pi}{2n}\right)-\left(cos\frac{7\pi}{2n}\cdot cos\frac{\pi}{2n}\right)=cos\frac{7\pi}{2n}\left(cos\frac{3\pi}{2n}-cos\frac{\pi}{2n}\right)$$

$=-2cos\dfrac{7\pi}{2n}\cdot sin\dfrac{\pi}{n}\cdot sin\dfrac{\pi}{2n}$ 　これが０となるためには、

（１）$\dfrac{7\pi}{2n}=\dfrac{(2k-1)\pi}{2}$ $(k=1,2,3,\cdots)$ より、$n=\dfrac{7}{2k-1}$ となり $n=7$，$\dfrac{7}{3}$，$\dfrac{7}{5}$，$\cdots$、であるが、

$n>3$、かつ整数でなければならないので、$n=7$ である。

（２） $\dfrac{\pi}{n}=k\pi\left(k=1,2,3,\cdots\cdots\right)$ より、$n=\dfrac{1}{k}$ n は整数であるから、これを満たす n はない。

（３） $\dfrac{\pi}{2n}=k\pi\left(k=1,2,3,\cdots\cdots\right)$ より、$n=\dfrac{1}{2k}$ n は整数であるから、これを満たす n はない。

以上より、成り立つのは「正七角形のみ」であることがわかった。

では、正多角形において連続する３本の対角線で $\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AD}-\dfrac{1}{AB}=0$ といった関係が成り立つものがあるだろうか？ $k=1$ は $\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AD}-\dfrac{1}{AB}$， $k=2$ は $\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{AE}-\dfrac{1}{AC}$， $k=3$ は $\dfrac{1}{AE}+\dfrac{1}{AF}-\dfrac{1}{AD}\cdots\cdots$ を表すものとする。連続する３本の対角線を次の⑤式で表し、

$\dfrac{1}{sin\dfrac{(k+1)\pi}{n}}+\dfrac{1}{sin\dfrac{(k+2)\pi}{n}}-\dfrac{1}{sin\dfrac{k\pi}{n}}$ ⋯⋯⋯⋯⑤ について同様の計算を行うと次式が得られる。

$$\frac{1}{sin\frac{k\pi}{n}}\cdot\frac{1}{sin\frac{(k+1)\pi}{n}}\cdot\frac{1}{sin\frac{(k+2)\pi}{n}}\left[sin\frac{k\pi}{n}sin\frac{(k+2)\pi}{n}+sin\frac{k\pi}{n}sin\frac{(k+1)\pi}{n}-sin\frac{(k+1)\pi}{n}sin\frac{(k+2)\pi}{n}\right]$$

$\left[\quad\right]$内を計算すると、

$$=\frac{1}{2}\left[\left(cos\frac{2\pi}{n}-cos\frac{(2k+2)\pi}{n}\right)+\left(cos\frac{\pi}{n}-cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)-\left(cos\frac{\pi}{n}-cos\frac{(2k+3)\pi}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(cos\frac{2\pi}{n}+cos\frac{(2k+3)\pi}{n}\right)-\left(cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+cos\frac{(2k+2)\pi}{n}\right)\right]$$

$$=sin\frac{(k+2)\pi}{n}\cdot sin\frac{k\pi}{n}-sin\frac{(2k+2)\pi}{n}\cdot sin\frac{k\pi}{n}=sin\frac{k\pi}{n}\left[sin\frac{(k+2)\pi}{n}-sin\frac{(2k+2)\pi}{n}\right]$$

これが０となるためには、

（１） $sin\dfrac{k\pi}{n}=0$ より 、$\dfrac{k\pi}{n}=0, \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots\cdots$ であるが、これを満たすのは $\dfrac{k}{n}=1, 2, 3\cdots\cdots$ である。頂点を結ぶ線は図形の中心線に対して対称なので、$n>2k+1$ でなければならず、これを満たす n と k の組みあわせはない。

（２） $sin\dfrac{(k+2)\pi}{n}-sin\dfrac{(2k+2)\pi}{n}=0$ より 、さらに和積の公式で変形して、

$sin\dfrac{(k+2)\pi}{n}-sin\dfrac{(2k+2)\pi}{n}=2\,sin\dfrac{k\pi}{2n}\cdot cos\dfrac{(3k+4)\pi}{2n}=0$ から、

(ｲ) $sin\dfrac{k\pi}{2n}=0$ より、$\dfrac{k\pi}{2n}=\alpha\pi\left(\alpha=1, 2, 3\cdots\cdots\right)$， $k=2n\alpha$、$n>2k+1$ からこれを満たす n と k の組み合わせはない。

(ﾛ) $cos\dfrac{(3k+4)\pi}{2n}=0$ より、$\dfrac{(3k+4)\pi}{2n}=\dfrac{(2\alpha-1)\pi}{2}\left(\alpha=1, 2, 3\cdots\cdots\right)$， $k=\dfrac{(2\alpha-1)n-4}{3}$

$\alpha=1$ のとき $n=7$， $k=1$ が満たす。$\alpha>2$ のとき $n>2k+1$ からこれを満たす n と k の組み合

わせはない。以上より、連続する３本の対角線で⑤を満たすものは存在しない。

結論は得られたが、具体的に数値を入れて確認してみたい。⑤式について、n, k を変化させて値の傾向を調べる。前述のとおり、頂点を結ぶ線は図形の中心線に対して対称なので、$n > 2k+1$ の範囲で考える。

■正五角形

$n=5$，$k=1$ の場合、$\frac{1}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}[0.8506] < \frac{1}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}[0.5257] + \frac{1}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}[0.5257] = 1.0514$

■正六角形

$n=6$，$k=1$ の場合、$\frac{1}{1} < \frac{1}{\sqrt{3}}[0.5774] + \frac{1}{2}[0.5] = 1.0774$

$n=6$，$k=2$ の場合、$\frac{1}{\sqrt{3}}[0.5774] < \frac{1}{2}[0.5] + \frac{1}{\sqrt{3}}[0.5774] = 1.0774$

■正七角形

$n=7$，$k=1$ の場合、$\frac{1}{2sin\frac{\pi}{7}}[1.1524] = \frac{1}{2sin\frac{2\pi}{7}}[0.6395] + \frac{1}{2sin\frac{3\pi}{7}}[0.5129] = 1.1524$

$n=7$，$k=2$ の場合、$\frac{1}{2sin\frac{2\pi}{7}}[0.6395] < \frac{1}{2sin\frac{3\pi}{7}}[0.5129] + \frac{1}{2sin\frac{4\pi}{7}}[0.5129] = 1.0257$

■正八角形

$n=8$，$k=1$ の場合、$\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}[1.3066] > \frac{1}{\sqrt{2}}[0.7071] + \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2}\right)}[0.5412] = 1.2483$

$n=8$，$k=2$ の場合、$\frac{1}{\sqrt{2}}[0.7071] < \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2}\right)}[0.5412] + \frac{1}{2}[0.5] = 1.0412$

$n=8$，$k=3$ の場合、$\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2}\right)}[0.5412] < \frac{1}{2}[0.5] + \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2}\right)}[0.5412] = 1.0412$

同じように正九角形、正十角形・・・・と計算して整理すると、

$n<6$，$k=1$，2 で $\frac{1}{sin\frac{k\pi}{n}} < \frac{1}{sin\frac{(k+1)\pi}{n}} + \frac{1}{sin\frac{(k+2)\pi}{n}}$

$n=7$，$k=1$ で $\frac{1}{sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{1}{sin\frac{(k+1)\pi}{n}} + \frac{1}{sin\frac{(k+2)\pi}{n}}$，$k=2$ で $\frac{1}{sin\frac{k\pi}{n}} < \frac{1}{sin\frac{(k+1)\pi}{n}} + \frac{1}{sin\frac{(k+2)\pi}{n}}$

$n>8$，$k=1$ で $\frac{1}{sin\frac{k\pi}{n}} > \frac{1}{sin\frac{(k+1)\pi}{n}} + \frac{1}{sin\frac{(k+2)\pi}{n}}$，$k>2$ で $\frac{1}{sin\frac{k\pi}{n}} < \frac{1}{sin\frac{(k+1)\pi}{n}} + \frac{1}{sin\frac{(k+2)\pi}{n}}$

$n=7$ を境に、8 以上では、$k=1$ で必ず $\frac{1}{sin\frac{k\pi}{n}} > \frac{1}{sin\frac{(k+1)\pi}{n}} + \frac{1}{sin\frac{(k+2)\pi}{n}}$，

$k>2$ で $\frac{1}{sin\frac{k\pi}{n}} < \frac{1}{sin\frac{(k+1)\pi}{n}} + \frac{1}{sin\frac{(k+2)\pi}{n}}$ となる。

図３は⑤式について、

$n=100$（正百角形）、$k=1\sim4$ の場合を計算したものである。

$k=1$ の場合は、$n=7$ 角形の時に⑤が０となり、n が大きくなるに従って⑤の値は減少する。つまり、

$$\frac{1}{sin\frac{k\pi}{n}} > \frac{1}{sin\frac{(k+1)\pi}{n}} + \frac{1}{sin\frac{(k+2)\pi}{n}}$$

である。$k=2\sim4$ の場合は、常に

$$\frac{1}{sin\frac{k\pi}{n}} < \frac{1}{sin\frac{(k+1)\pi}{n}} + \frac{1}{sin\frac{(k+2)\pi}{n}}$$

となるので、$n=7$ 以外で⑤が０となる n，k の組み合わせは存在しないことがわかる。

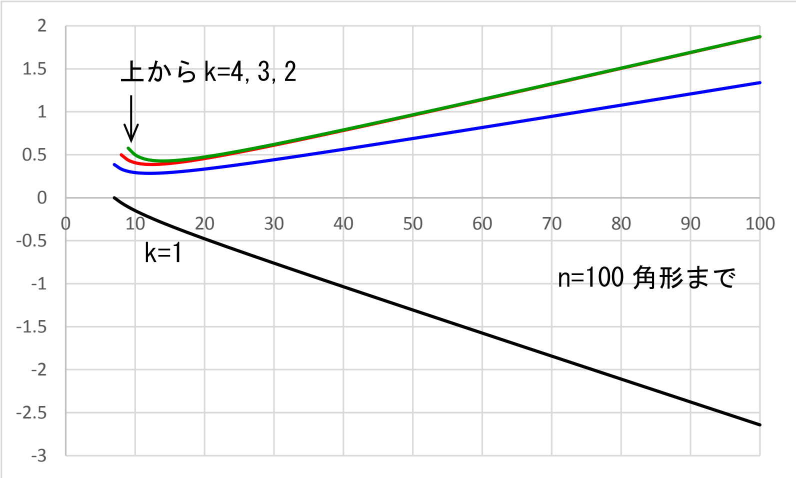


図３

正多角形における、連続する３本の対角線の問題を考えていて、私としては、どこかにこれを満たす組み合わせがあることを期待していたが、そういう組み合わせは存在しないという結論になった。

正七角形だけがこの条件に合致するのは、三角形の和-積，積-和の公式で変形していくと、自然と $cos\frac{7\pi}{2n}$ が導かれ、$n=\frac{7}{2k-1}$ よりこれを満たすのが唯一「７」であることによる。

その意味で「７」という数は絶妙の数という新しい発見だった。（２０２２．０１．２３）