１２０「虚数と実数の不思議な関係」

前項「１１９ 円内接多角形の不思議な性質（２）」表１で、七角形と九角形の場合だけ、頂点間の長さを無理数で表すことができないのがとても気になる。

七角形：$sin\frac{\pi}{7}$，九角形：$sin\frac{\pi}{9}$ を無理数として明快に表すことができないか？

まず、$\frac{\pi}{9}=\frac{\pi}{3}\div 3$ であることを利用して、３倍角の公式が使える $sin\frac{\pi}{9}$ について考えてみる。

３倍角の公式 $3\,sin\,\theta-4\,sin^3\,\theta=\ sin\,3\theta$ より、$3\,sin\frac{\pi}{9}-4\,sin^3\frac{\pi}{9}=sin\left(3\cdot\frac{\pi}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$4\,sin^3\frac{\pi}{9}-3\,sin\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$　これを解いて $sin\frac{\pi}{9}=-\frac{1-\sqrt{3}i}{2\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}}-\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)}$

3 次方程式のため、非常に複雑な解になっているが、極形式を用いて整理すると、

$-\frac{1-\sqrt{3}i}{2\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}}=-\frac{2\cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}{2\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{5\pi}{18}\right)}}$，$-\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)}=-\frac{1}{4}\cdot e^{i\left(\frac{5\pi}{18}\right)}\cdot 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ だから、

$$sin\frac{\pi}{9}=-\frac{2\cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}{2\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{5\pi}{18}\right)}}-\frac{1}{4}\cdot e^{i\left(\frac{5\pi}{18}\right)}\cdot 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{1}{2}\left[e^{i\left(\frac{11\pi}{18}\right)}+e^{i\left(-\frac{11\pi}{18}\right)}\right]$$

$=-cos\ \frac{11\pi}{18}=-sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{18}\right)=-sin\left(-\frac{2\pi}{18}\right)=sin\frac{\pi}{9}$ となり確かに正しい。

$-\frac{1-\sqrt{3}i}{2\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}}-\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)}$ は、これ以上簡単にするのは難しいが工夫すると、

$\left[e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right]^{\frac{1}{3}}=\left[cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right]^{\frac{1}{3}}=cos\frac{\pi}{9}+isin\frac{\pi}{9}$，$\left[e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right]^{\frac{1}{3}}=\left[cos\frac{\pi}{3}-isin\frac{\pi}{3}\right]^{\frac{1}{3}}=cos\frac{\pi}{9}-isin\frac{\pi}{9}$ から

$sin\frac{\pi}{9}=\frac{1}{2i}\left[\left[e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right]^{\frac{1}{3}}-\left[e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right]^{\frac{1}{3}}\right]=\frac{1}{2i}\left(\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}-\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}}\right)=0.34202$ 少しは見やすくなったが、

これ以上は難しい。

$\frac{1}{2i}$ を消すため、$sin\frac{2\pi}{9}$，$cos\frac{\pi}{9}$ を求め、$sin\frac{2\pi}{9}=2sin\frac{\pi}{9}cos\frac{\pi}{9}$ より計算すると（途中計算は省略）

$sin\frac{2\pi}{9}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\left[\sqrt[3]{\left(-\sqrt{3}+i\right)}+\sqrt[3]{\left(-\sqrt{3}-i\right)}\right]$，$cos\frac{\pi}{9}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\left[\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{3}i\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{3}i\right)}\right]$ より、

$$\sin\frac{\pi}{9}=\frac{\sin\frac{2\pi}{9}}{2\cos\frac{\pi}{9}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\left[\sqrt[3]{\left(-\sqrt{3}+i\right)}+\sqrt[3]{\left(-\sqrt{3}-i\right)}\right]}{2\cdot\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\left[\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{3}i\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{3}i\right)}\right]}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(-\sqrt{3}+i\right)}+\sqrt[3]{\left(-\sqrt{3}-i\right)}}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{3}i\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{3}i\right)}}$$ 少しは美しい

式になっただろうか？ $\sin\frac{\pi}{9}=0.34202$ という実数なのに $\sqrt[3]{\quad}$ から虚数単位 i を外に出すことはできない。カルダーノの公式で３次方程式を解く際に現れる形で「不還元」の形という。方程式の解の中には、実数でも虚数単位を使わないと表せない数があるのは何とも不思議だ。

他に、$x^9=1$ という方程式を利用する方法がある。
$x^9-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$ と分解し、$x^6+x^3+1=0$ の解の６つのうち、
$x=-\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}$ 及び、$-\cos\frac{\pi}{9}-i\sin\frac{\pi}{9}$ の解が $\sin\frac{\pi}{9}$ を含んでいる。

$$\left(-\cos\frac{\pi}{9}\pm i\sin\frac{\pi}{9}\right)^6+\left(-\cos\frac{\pi}{9}\pm i\sin\frac{\pi}{9}\right)^3+1=\left(-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1=0$$

$-\cos\frac{9\pi}{9}=1$，$\pm i\sin\frac{9\pi}{9}=0$ なので、$\left(-\cos\frac{\pi}{9}\pm i\sin\frac{\pi}{9}\right)^9=-\cos\frac{9\pi}{9}\pm i\sin\frac{9\pi}{9}=1$

$x^6+x^3+1=0$ を解くには $x^3=X$ とおき、$X^2+X+1=0$ を解いて、$X=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)}$

$X=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ として、Xを戻すと $x^3=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ より、$x=e^{i\left(\frac{2\pi}{9}\right)}$ となるが、他に $e^{i\left(\frac{8\pi}{9}\right)}$，$e^{i\left(-\frac{4\pi}{9}\right)}$ も解である。

$\left[e^{i\left(\frac{8\pi}{9}\right)}\right]^3=e^{i\left(\frac{8\pi}{3}\right)}$，$\left[e^{i\left(-\frac{4\pi}{9}\right)}\right]^3=e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}$ なので $e^{i\left(\frac{2\pi}{9}\right)}=e^{i\left(\frac{8\pi}{3}\right)}=e^{i\left(-\frac{4\pi}{9}\right)}$ であるが、それぞれ３乗すると

$e^{i\left(\frac{2\pi}{9}\right)}=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$，$e^{i\left(\frac{8\pi}{9}\right)}=\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}$

$e^{i\left(-\frac{4\pi}{9}\right)}=\cos\frac{4\pi}{9}-i\sin\frac{4\pi}{9}$ となり、それぞれ異なった値である。

これから $\sin\frac{\pi}{9}$，$\cos\frac{\pi}{9}$，$\sin\frac{2\pi}{9}$，$\cos\frac{2\pi}{9}$，$\sin\frac{4\pi}{9}$，$\cos\frac{4\pi}{9}$ の値が含まれていることがわかる。

次に $\sin\frac{\pi}{7}$ について、
$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ と因数分解して、$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ を解けば、その中に $\sin\frac{\pi}{7}$ が含まれる。

x^6・・・の式を x^3 で割り、$X=x+\frac{1}{x}$ とおくと、$X^3+X^2-2X-1=0$ と３次方程式にすることで解くこ

はできるが、$X = x + \dfrac{1}{x}$ に戻す時に再び２次方程式になり複雑すぎて不適当。

７倍角の式、$sin\, 7\alpha = sin(4\alpha + 3\alpha) = 7\, sin\,\alpha - 56\, sin^3\,\alpha + 112\, sin^5\,\alpha - 64\, sin^7\,\alpha$ より、

$sin\, 7\alpha = (sin\,\alpha)(64\, sin^6\,\alpha - 112\, sin^4\,\alpha + 56\, sin^2\,\alpha - 7)$， $\sin\alpha \neq 0$ で割り、 $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$ とおいて

$sin\,\pi = 64\, sin^6\dfrac{\pi}{7} - 112\, sin^4\dfrac{\pi}{7} + 56\, sin^2\dfrac{\pi}{7} - 7 = 0$ これを解いて、

$$sin\frac{\pi}{7} = \sqrt{\frac{7}{12} - \frac{7^{\frac{2}{3}}\cdot\left(1+\sqrt{3}i\right)}{12\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{-1+3\sqrt{3}i}} - \frac{1}{24}\left(1-\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{\frac{7}{2}\left(-1+3\sqrt{3}i\right)}}$$ が得られる。

これを極形式を用いて整理すると、

$$sin\frac{\pi}{7} = \sqrt{\frac{7}{12} - \frac{7^{\frac{2}{3}}\cdot 2\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{12\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 7^{\frac{1}{6}}\cdot e^{i\left[\frac{1}{3}\left(\pi + tan^{-1}\left(-3\sqrt{3}\right)\right)\right]}} - \frac{1}{24}\cdot 2\cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\cdot 7^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\left[\frac{1}{3}\left(\pi + tan^{-1}\left(-3\sqrt{3}\right)\right)\right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{12} - \frac{\sqrt{7}}{12}\left[e^{i\left[\frac{1}{3}\left(tan^{-1}\left(3\sqrt{3}\right)\right)\right]} + e^{i\left[-\frac{1}{3}\left(tan^{-1}\left(3\sqrt{3}\right)\right)\right]}\right]} = 0.43388$$

上式を複素数に直して、 $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{7}{2}}\left(\sqrt[3]{1+3\sqrt{3}i} + \sqrt[3]{1-3\sqrt{3}i}\right)}$ と表すこともできる。

$sin\dfrac{\pi}{9}$ が $\left[e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right]^{\frac{1}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{9}\right)}$ とすることができるのに対し、$sin\dfrac{\pi}{7}$ が厄介なのは、

$\left[e^{i\left(tan^{-1}\left(3\sqrt{3}\right)\right)}\right]^{\frac{1}{3}} = e^{i\left[\frac{1}{3}\left(tan^{-1}\left(3\sqrt{3}\right)\right)\right]}$ とせざるを得ず、どうしても tan^{-1} が出てきてしまうためである。

同様に、$sin\dfrac{\pi}{11}$， $sin\dfrac{\pi}{13}$， $sin\dfrac{\pi}{17}$ ……など、$sin\dfrac{\pi}{\text{素数}}$ となる場合については難しいと思われる。

$sin\dfrac{\pi}{9}$ で現れる $\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}$ ， $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$ や $sin\dfrac{\pi}{7}$ で現れる $\sqrt[3]{1+3\sqrt{3}i}$， $\sqrt[3]{1-3\sqrt{3}i}$ は何とかならないものだろうか？ $\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}$ ， $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$ は共役複素数で、虚数部分を $\sqrt[3]{\quad}$ の外に出すことができれば $(\bigcirc + \bigcirc i) + (\bigcirc - \bigcirc i)$ という形になり、虚数が相殺され実数となるはずなのだが、、、、

$\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i} = a + bi$ とおいて両辺を３乗すると、$1 + \sqrt{3}i = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$ から、

$a^3 - 3ab^2 = 1$， $3a^2b - b^3 = \sqrt{3}$， $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i} = a + bi$ とおくと、$a^3 - 3ab^2 = 1$， $3a^2b - b^3 = -\sqrt{3}$ から、「$a^3 - 3ab^2 = 1$， $3a^2b - b^3 = \sqrt{3}$」，及び「$a^3 - 3ab^2 = 1$， $3a^2b - b^3 = -\sqrt{3}$」 を解くと、

$\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}+\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}=\sqrt[3]{2+\dfrac{6}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right)}}+3\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}}$ となり、虚数項は相殺されるが、実数項の中に虚数単位が含まれ、むしろ複雑になってしまった。これを整理していくと、

$\sqrt[3]{2+3\cdot 2^{\frac{2}{3}}\left[\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}+\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}\right]}$ となり、よく見ると単純に $\left[\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}+\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}\right]$ を３乗して３乗根を取った形で、元にもどってしまい「不還元」は解消されない。調べたところ、この不還元の形が解消できないことは既に証明済みだった。

無理数で表せる三角関数の値は、0°,1.5°,3.0°,4.5°・・・・・,88.5°,90°のように 1.5°ごとである。このことから、２や５の倍数である 10°, 20°,40°,50°, 70°,80°などの値は無理数ではあらわすことができず、表そうとすると複素数の３乗根が出てきてしまう。

例えば $sin1.5°$ $\left(sin\dfrac{\pi}{120}\right)$ の値であれば、かなり複雑になるが次のように無理数で表すことができる。

$$sin1.5° =\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2\sqrt{5}\left(-1+\sqrt{5}\right)}}{8}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{6\sqrt{5}\left(-1+\sqrt{5}\right)}}{8}=0.02618\cdots$$

そこで、$e^{i\left(\frac{\pi}{10}\right)}=\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}i$ の３乗根を計算してみると、

$\dfrac{\pi}{10}$ は 18°だからその$\dfrac{1}{3}$（$\dfrac{\pi}{30}$）は 6°、いずれも 1.5°の倍数だから３乗根は無理数で表せるはずだ。

計算すると、$\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}i}=\left[e^{i\left(\frac{\pi}{10}\right)}\right]^{\frac{1}{3}}=e^{i\left(\frac{\pi}{30}\right)}=cos\left(\dfrac{\pi}{30}\right)+i\,sin\left(\dfrac{\pi}{30}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2\sqrt{5}\left(-1+\sqrt{5}\right)}}{8}+\dfrac{-\left(1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{6\sqrt{5}\left(-1+\sqrt{5}\right)}}{8}i=0.9945+0.1045i$ と表すことができる

$\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}i}=a+bi$ とおいて、$a^3-3ab^2=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$，$3a^2b-b^3=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

これを解くと、

$$a=\left[\frac{1}{8}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}+\frac{3}{8\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{2\left(3-\sqrt{5}\right)}i}+\sqrt[3]{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}-\sqrt{2\left(3-\sqrt{5}\right)}i}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

b については、$k=\sqrt[3]{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{2\left(3-\sqrt{5}\right)}i}+\sqrt[3]{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}-\sqrt{2\left(3-\sqrt{5}\right)}i}$ と置いて、

$$b=\frac{1}{9(\sqrt{5}-1)}\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}\left[\frac{1}{8}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}+\frac{3}{8\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\cdot k\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\times\left[121-19\sqrt{5}+112\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\left\{\frac{1}{8}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}+\frac{3}{8\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\cdot k\right\}-512\left(\frac{1}{8}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}+\frac{3}{8\cdot 2^{\frac{2}{3}}}k\right)^{2}\right]$$

a,b は虚数が含まれているが実数であり、$a=0.99452\cdots, b=0.10452\cdots$ となり、

それぞれ $a=cos\left(\frac{\pi}{30}\right)$ 及び $b=sin\left(\frac{\pi}{30}\right)$ に一致する。以上から、

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}i}=\left[\frac{1}{8}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}+\frac{3}{8\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\cdot k\right]^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{9(\sqrt{5}-1)}\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}\left[\frac{1}{8}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}+\frac{3}{8\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\cdot k\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\times\left[121-19\sqrt{5}+112\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\left\{\frac{1}{8}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}+\frac{3}{8\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\cdot k\right\}-512\left(\frac{1}{8}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}+\frac{3}{8\cdot 2^{\frac{2}{3}}}k\right)^{2}\right]i$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

と表されるが、前述の通り次の②のようになることが分かっているので、実部と虚部は一致しなければならない。

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}i}=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})+\sqrt{2\sqrt{5}(-1+\sqrt{5})}}{8}+\frac{-(1+\sqrt{5})+\sqrt{6\sqrt{5}(-1+\sqrt{5})}}{8}i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots②$$

以上より、①②の実部が等しいとおいて、

$$\left[\frac{1}{8}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}+\frac{3}{8\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\cdot k\right]^{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})+\sqrt{2\sqrt{5}(-1+\sqrt{5})}}{8}$$

これから k を求めると、

$$k=\frac{8\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})+\sqrt{2\sqrt{5}(-1+\sqrt{5})}}{8}\right)^{3}-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right]=\frac{\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}}{2^{\frac{1}{3}}} \quad \text{(途中計算省略)}$$

従って、$k=\sqrt[3]{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}+\sqrt{2(3-\sqrt{5})}i}+\sqrt[3]{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}-\sqrt{2(3-\sqrt{5})}i}=\dfrac{\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}}{2^{\frac{1}{3}}}$

これで、実数であっても無理数と虚数単位を組み合わせた３乗根で $\sqrt[3]{○+○i}+\sqrt[3]{○-○i}$ と表されて

いたものが、$\dfrac{\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6\left(5+\sqrt{5}\right)}}}{2^{\frac{1}{3}}}$ $(=3.1574\cdots)$ という無理数で表すことができた。

それでは一般的に、

$\sqrt[3]{a+bi}+\sqrt[3]{a-bi}$ という形のとき、a, b がどのようであれば $\sqrt[3]{\quad}$ から虚数単位「i」が出せるのだろうか？極形式を使って式を変形すると、

$$\sqrt[3]{a+bi}+\sqrt[3]{a-bi}=\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^2}e^{i\left(tan^{-1}\frac{b}{a}\right)}}+\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^2}e^{i\left(-tan^{-1}\frac{b}{a}\right)}}=(a^2+b^2)^{\frac{1}{6}}\left[e^{i\left(\frac{1}{3}tan^{-1}\frac{b}{a}\right)}+e^{i\left(-\frac{1}{3}tan^{-1}\frac{b}{a}\right)}\right]$$

$=2(a^2+b^2)^{\frac{1}{6}}\cdot cos\left(\dfrac{1}{3}tan^{-1}\dfrac{b}{a}\right)$ ここで $tan^{-1}\dfrac{b}{a}=\theta$ とおくと $cos\,\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ だから、$cos\,\theta$ の３倍角の公式より、$4\,cos^3\dfrac{\theta}{3}-3\,cos\dfrac{\theta}{3}-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$ これを解いて、

$cos\dfrac{\theta}{3}=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i}+\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i}$ 従って、

$$\sqrt[3]{a+bi}+\sqrt[3]{a-bi}=2\cdot(a^2+b^2)^{\frac{1}{6}}\cdot\left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i}\right]$$

$=2\cdot(a^2+b^2)^{\frac{1}{6}}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{6}}}\cdot\left(\sqrt[3]{a+bi}+\sqrt[3]{a-bi}\right)=\sqrt[3]{a+bi}+\sqrt[3]{a-bi}$ となり、元に戻ってしまい、不還元となることの証明をした形となった。これが不還元とならないためには、

$cos\left(\dfrac{1}{3}tan^{-1}\dfrac{b}{a}\right)$ の段階で $cos\,\theta$ の値が無理数で表せる $\theta=\dfrac{1}{3}tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ が 1.5° の倍数となる必要がある。

前出の $k=\sqrt[3]{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{2\left(3-\sqrt{5}\right)}i}+\sqrt[3]{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}-\sqrt{2\left(3-\sqrt{5}\right)}i}$ については、

$tan^{-1}\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{2\left(3-\sqrt{5}\right)}}{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}=\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ これは $\theta=18°$ の値で、その $\dfrac{1}{3}$ は 1.5 の倍数であるから、$\sqrt[3]{\quad}$ から虚数単位を出すことができたのである。

カルダーノの公式を用いて３次方程式 $x^3+px+q=0$ を解くと、その解 x_1, x_2, x_3 は、

$x_1=\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$, $x_2=\omega\sqrt[3]{\alpha}+\overline{\omega}\sqrt[3]{\beta}$, $x_3=\overline{\omega}\sqrt[3]{\alpha}+\omega\sqrt[3]{\beta}$ となる。

ただし、$\alpha=-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{p}{3}\right)^3+\left(\dfrac{q}{2}\right)^2}$, $\beta=\dfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{p}{3}\right)^3+\left(\dfrac{q}{2}\right)^2}$, $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $\overline{\omega}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\omega^2$

３次方程式の解は３つあり、その解は判別式により次の３通りに分けられる。

(ｲ)　$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2>0$ のとき、実数根１、複素数根２

(ﾛ)　$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0$，かつ $p<0$ のとき、実数根２（１つは重根）

(ﾊ)　$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2<0$ のとき、実数根３

(ｲ) の例

例えば、$x^3+3x+1=0$ $\left[判別式：\left(\frac{3}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}>0\right]$ の解は、

$$x_1=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\ \ (=-0.3222\cdots)\quad \to 実数根$$

$$x_2,x_3=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)i\quad (=0.1611\pm1.7544\,i\cdots)\quad \to 複素数根$$

(ﾛ) の例

例えば、$x^3-3x+2=0$ $\left[判別式：\left(\frac{-3}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{2}\right)^2=0\right]$ の解は、

$(x-1)^2\cdot(x+2)=0$ より、$x_1=x_2=1$（重根），$x_3=-2$　→ 実数根

(ﾊ) の例

例えば、$x^3-3x+1=0$ $\left[判別式：\left(\frac{-3}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}<0\right]$ の解は、

判別式がマイナスとなる(ﾊ)の場合に限り $\sqrt[3]{○+○i}+\sqrt[3]{○-○i}$ という形の実数根が３つになる。

$$x_1=\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}}\quad (=1.5321\cdots)\quad \to 実数根$$

$$x_2,x_3=-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}}\quad (=0.3473\cdots,\ -1.8794\cdots)\quad \to 実数根$$

(ﾛ) の場合に対し、たった「１」定数項が違うだけなのに、解の形は全く異なる。

グラフを描くと図１のとおり曲線（ﾊ）は３つの実数根があることがわかる。

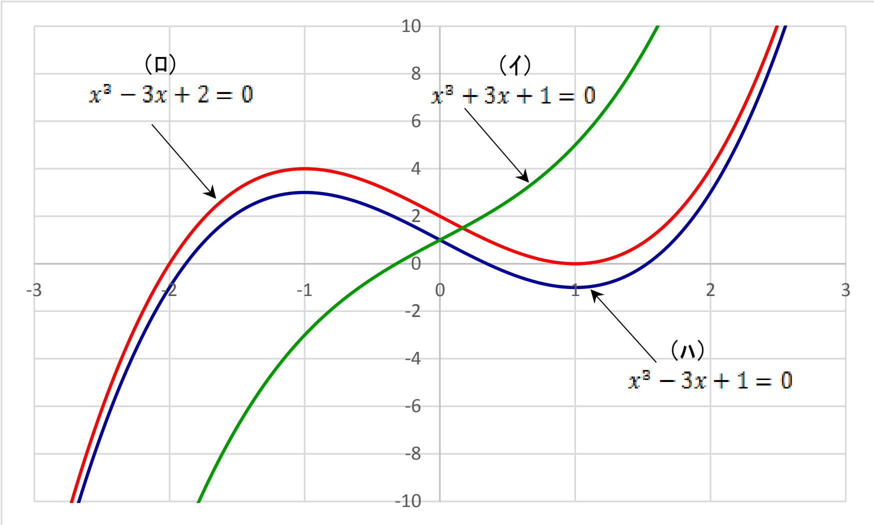

図 1

(ハ) の場合、$sin\,\theta$ の 3 倍角の公式を使えば、$\sqrt[3]{\bigcirc+\bigcirc i}+\sqrt[3]{\bigcirc-\bigcirc i}$ を伴わずに解を求めることができる。

$4\,sin^3\dfrac{\theta}{3}-3\,sin\dfrac{\theta}{3}+sin\,3\theta=0$, $sin\dfrac{\theta}{3}=x$ として、$x^3-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{sin\,3\theta}{4}=0$ と変形すれば、解は $x=sin\,\theta$ である。この方程式の係数を $x^3+px+q=0$ に整合させると、

方程式の一般解は $x=\sqrt{-\dfrac{4p}{3}}\,sin\left[\dfrac{1}{3}\left(sin^{-1}\dfrac{9q}{4p^2}\sqrt{-\dfrac{4p}{3}}+2k\pi\right)\right]$ $(\,k=0,1,2\,)$ …………③

が 3 つの実数根となる。

$p=-3$, $q=1$ を③に入れて計算すると、

$\sqrt{-\dfrac{4p}{3}}=\sqrt{-\dfrac{4(-3)}{3}}=2$, $sin^{-1}\dfrac{9q}{4p^2}\sqrt{-\dfrac{4p}{3}}=sin^{-1}\dfrac{9\cdot 1}{4(-3)^2}\sqrt{-\dfrac{4(-3)}{3}}=sin^{-1}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$ から、

$$x_1=2\,sin\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)\right]=2\,sin\left(\frac{13\pi}{18}\right)=2\,sin\left(\frac{5\pi}{18}\right)\quad(=1.5321\cdots)$$

$$x_3=2\,sin\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}+4\pi\right)\right]=2\,sin\left(\frac{25\pi}{18}\right)=-2\,sin\left(\frac{7\pi}{18}\right)\quad(-1.8794\cdots)$$

$$x_2=2\,sin\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}+6\pi\right)\right]=2\,sin\left(\frac{37\pi}{18}\right)=2\,sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\quad(=0.3473\cdots)$$

無理数と虚数単位を組み合わせた 3 乗根で表されていた実数根が、直接三角関数の値として得られた。

次に $sin(1^\circ)$, $cos(1^\circ)$ の値をはじめ、これまで表されていなかった三角関数の値がどうなるのか考えてみたい。まず、1° の値について、

$sin(1^\circ)=sin(10^\circ-9^\circ)=sin(10^\circ)\,cos(9^\circ)-sin(9^\circ)\,cos(10^\circ)$

$cos(1^\circ)=cos(10^\circ-9^\circ)=cos(10^\circ)\,cos(9^\circ)+sin(10^\circ)\,sin(9^\circ)$

なので、$sin(9°)$, $cos(9°)$, $sin(10°)$, $cos(10°)$ がわかれば良い。

$sin(9°)$， $cos(9°)$ の値は、$cos(18°)$ から半角の公式により、$sin(10°)$， $cos(10°)$ の値は、３倍角の公式から求めることができる。

$$cos(18°) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \text{ から、} cos(9°) = \sqrt{\frac{1+cos(18°)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$$

$$sin(9°) = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$$

$sin(10°)$ は３倍角の公式より、$4\,sin^3(10°) - 3\,sin(10°) + \frac{1}{2} = 0$　を解いて、

$$sin(10°) = -\frac{1+\sqrt{3}i}{4}\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} - \frac{1-\sqrt{3}i}{4}\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}} = \frac{\overline{\omega}\sqrt[3]{\omega}+\omega\sqrt[3]{\overline{\omega}}}{2} = \frac{\omega^{\frac{2}{3}}+\overline{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2}$$

$$cos(10°) = \sqrt{1-\left(\frac{\overline{\omega}\sqrt[3]{\omega}+\omega\sqrt[3]{\overline{\omega}}}{2}\right)^2} = \frac{\omega\sqrt[3]{\overline{\omega}}-\overline{\omega}\sqrt[3]{\omega}}{2i} = \frac{\omega^{\frac{2}{3}}-\overline{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2i}$$

ここで $\omega = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\overline{\omega} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ である。どうしても複素数の３乗根は避けられない。

以上より、$sin(1°)$， $cos(1°)$ の値を得ることができる。

以下、同様の考え方で計算して、1°~10°，20°，40°，50°，70°，80° の sin， cos の値をまとめておく。

$sin(1°)$	$\frac{\omega^{\frac{2}{3}}+\overline{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4} - \frac{\omega^{\frac{2}{3}}-\overline{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2i}\cdot\frac{\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$	0.01745・・・
$cos(1°)$	$\frac{\omega^{\frac{2}{3}}+\overline{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4} + \frac{\omega^{\frac{2}{3}}-\overline{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2i}\cdot\frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$	0.99984・・・
$sin(2°)$	$\frac{\omega^{\frac{4}{3}}+\overline{\omega}^{\frac{4}{3}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\omega^{\frac{4}{3}}-\overline{\omega}^{\frac{4}{3}}}{2i}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	0.03489・・・
$cos(2°)$	$\frac{\omega^{\frac{4}{3}}+\overline{\omega}^{\frac{4}{3}}}{2}\cdot\frac{-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} + \frac{\omega^{\frac{4}{3}}-\overline{\omega}^{\frac{4}{3}}}{2i}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	0.99939・・・
$sin(3°)$	$\frac{1}{16}\left[\sqrt{2}(1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{5}) - 2(-1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}\right]$	0.05233・・・
$cos(3°)$	$\frac{1}{16}\left[\sqrt{2}(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{5}) + 2(1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}\right]$	0.99862・・・

$sin(4°)$	$\frac{\omega^{\frac{1}{3}}+\bar{\omega}^{\frac{1}{3}}}{2}\cdot\frac{(1-\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}+\frac{\omega^{\frac{1}{3}}-\bar{\omega}^{\frac{1}{3}}}{2i}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	0.06975･･･
$cos(4°)$	$\frac{\omega^{\frac{1}{3}}+\bar{\omega}^{\frac{1}{3}}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}+\frac{\omega^{\frac{1}{3}}-\bar{\omega}^{\frac{1}{3}}}{2i}\cdot\frac{(-1+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$	0.99756･･･
$sin(5°)$	$\frac{\omega^{\frac{2}{3}}-\bar{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2i}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-\frac{\omega^{\frac{2}{3}}+\bar{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\frac{\bar{\omega}\sqrt[3]{-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}i}+\omega\sqrt[3]{-\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{2+\sqrt{3}}i}}{2\sqrt[3]{4}}$ （別表示）	0.08715･･･
$cos(5°)$	$\frac{\omega^{\frac{2}{3}}-\bar{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2i}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\omega^{\frac{2}{3}}+\bar{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{2-\sqrt{3}}i}+\sqrt[3]{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{2-\sqrt{3}}i}}{2\sqrt[3]{4}}$ （別表示）	0.99619･･･
$sin(6°)$	$\frac{(-1-\sqrt{5})+\sqrt{3}\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{8}$	0.10452･･･
$cos(6°)$	$\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})+\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{8}$	0.99452･･･
$sin(7°)$	$\frac{\omega^{\frac{2}{3}}+\bar{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\frac{1}{16}\left[\sqrt{2}(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{5})+2(1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}\right]$ $-\frac{\omega^{\frac{2}{3}}-\bar{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2i}\cdot\frac{1}{16}\left[\sqrt{2}(1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{5})-2(-1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}\right]$	0.12186･･･
$cos(7°)$	$\frac{\omega^{\frac{2}{3}}+\bar{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\frac{1}{16}\left[\sqrt{2}(1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{5})-2(-1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}\right]$ $+\frac{\omega^{\frac{2}{3}}-\bar{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2i}\cdot\frac{1}{16}\left[\sqrt{2}(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{5})+2(1+\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}}\right]$	0.99254･･･
$sin(8°)$	$-\frac{\omega^{\frac{2}{3}}+\bar{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}+\frac{\omega^{\frac{2}{3}}-\bar{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2i}\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	0.13917･･･
$cos(8°)$	$\frac{\omega^{\frac{2}{3}}+\bar{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\frac{\omega^{\frac{2}{3}}-\bar{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2i}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	0.99026･･･
$sin(9°)$	$\frac{\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$	0.15643･･･
$cos(9°)$	$\frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$	0.98768･･･

$sin(10°)$	$cos(80°)$	$\frac{\omega^{\frac{2}{3}}+\overline{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2}$ $\frac{\overline{\omega}\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i}+\omega\sqrt[3]{-1-\sqrt{3}i}}{2\sqrt[3]{2}}$	0.17364･･･
$sin(20°)$	$cos(70°)$	$\frac{\omega^{\frac{4}{3}}-\overline{\omega}^{\frac{4}{3}}}{2i}$ $\frac{\overline{\omega}\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}+\omega\sqrt[3]{-\sqrt{3}-i}}{2\sqrt[3]{2}}$	0.34202･･･
$sin(40°)$	$cos(50°)$	$\frac{\omega^{\frac{1}{3}}-\overline{\omega}^{\frac{1}{3}}}{2i}$ $\frac{\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}+\sqrt[3]{-\sqrt{3}-i}}{2\sqrt[3]{2}}$	0.64278･･･
$sin(50°)$	$cos(40°)$	$\frac{\omega^{\frac{1}{3}}+\overline{\omega}^{\frac{1}{3}}}{2}$ $\frac{\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i}+\sqrt[3]{-1-\sqrt{3}i}}{2\sqrt[3]{2}}$	0.76604･･･
$sin(70°)$	$cos(20°)$	$-\frac{\omega^{\frac{4}{3}}+\overline{\omega}^{\frac{4}{3}}}{2}$ $\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}+\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}}{2\sqrt[3]{2}}$	0.93969･･･
$sin(80°)$	$cos(10°)$	$\frac{\omega^{\frac{2}{3}}-\overline{\omega}^{\frac{2}{3}}}{2i}$ $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}}{2\sqrt[3]{2}}$	0.98480･･･

これらの表を作るとき、$\omega,\overline{\omega}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\left[e^{\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)}\right]$ あるいは、$\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$ $\left[e^{\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)}\right]$ といった値がポイントとなっている。$\frac{2\pi}{3}(120°)$ の $\frac{1}{3}$ が 40° これをもとに 20° や 10° が得らる。また、10° は $\frac{\pi}{6}(30°)$ の $\frac{1}{3}$ から計算することもできる。それをらをもとに 5° は$(15-10)°$、2° は$(5-3)°$ というように、和，差の公式を使って求めることができるが、計算過程で $\frac{1}{3}$ 角度の三角関数値が必要となるため、複素数の３乗根が出て来る。

実用上は“小数”で問題ない三角関数の値であるが、正確には無理数で表される。しかし、中には無理数でも表すことができない三角関数値があり、それが 1.5° の倍数以外で２や５の倍数の角度である。

それらを表すためには、複素数の３乗根という不還元の形を避けることができない。上記の「表」を埋めるだけでも相当の計算が必要であり、検算にもかなりの時間を費やした。（２０２２．０１．２５）

参考文献　１．ラマヌジャンの遺した関数（D．フックス，S．タバチニコフ　蟹江幸博 訳）
　　　　　２．三角比の表を超える（西本教善）