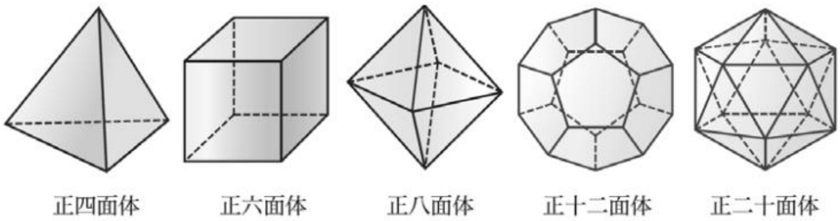
１２５「四面体」

　平面の幾何学より、立体幾何学の方が脳の活性化に良いだろうと思い、“四面体”について考えてみた。実際は活性化というより、脳の老化防止が目的といった方がいいかも知れない。

　四面体とは、四つの面が三角形で囲まれた立体である。すべての面が正三角形の場合は正四面体で、５種類しかない正多面体（正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体）の１つである。正多面体は、全ての面が同一の正多角形で構成され、すべての頂点において接する面の数が等しい立体をいう。

　正四面体は正三角形　×４
　正六面体は正方形　　×６
　正八面体は正三角形　×８
　正十二面体は正五角形×１２
　正二十面体は正三角形×２０



これらの立体図形については、正多角形の１辺を“１”とした時の、表面積，体積，外接球半径，内接球半径などを比較するのも興味深い。

　正四面体の場合はそれほど難しくない。
図１－１は辺の長さ“１”の正四面体を上から見た図で、⊿ＡＢＣはＸＹ平面上、頂点ＤはＺ軸上にある。図１－２は横から見た図で、高さは$\sqrt{\frac{2}{3}}$である。

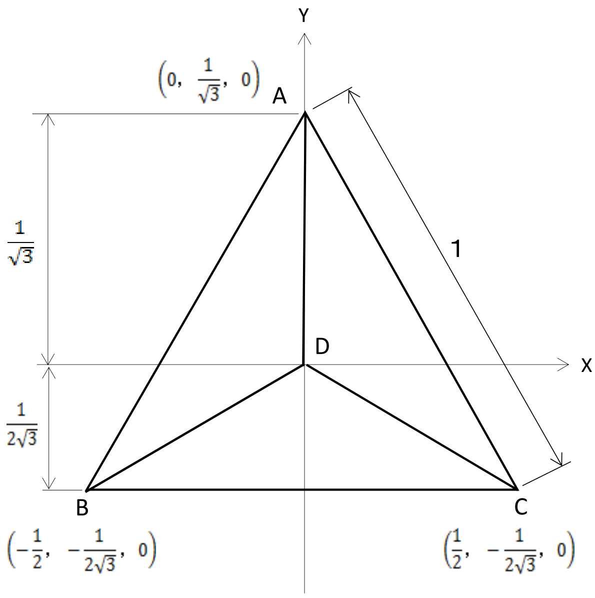


図１－１

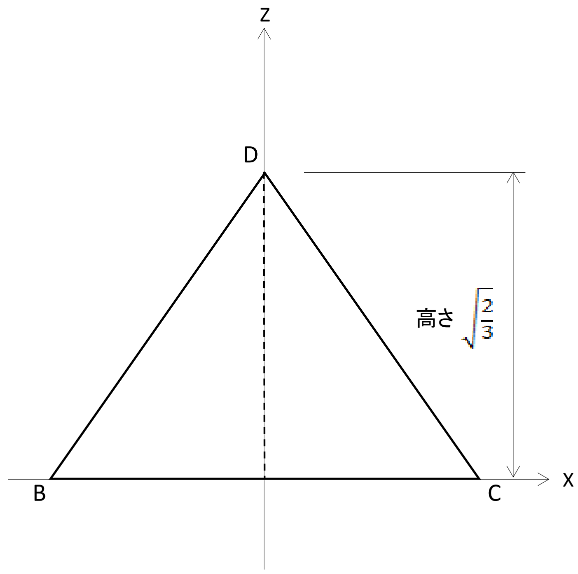


図１－２

正四面体の表面積は $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times 4=\sqrt{3}$,　体積は $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{2}{3}}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}$

外接球の半径（Ｒ）とその中心について、頂点の座標は図１－１に示すとおりである。
外接球の中心をＯ$(x_o,\ y_o,\ z_o)$とすると、Ｏは４つの頂点から等距離にある点である。その点は図から明らかに $x_o=0$，$y_o=0$ なので、z_o を求めれば良い。ＤＯ＝ＡＯより、

$\sqrt{\frac{2}{3}}-z_o=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+{z_o}^2}$　これを解いて $z_o=\frac{\sqrt{6}}{12}$，ＤＯ＝$\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{6}}{12}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

以上より、正四面体の外接球の半径は $\mathrm{R}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ 、中心座標は $\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{6}}{12}\right)$ である。

次に内接球の半径（ｒ）とその中心について。内接球の中心をＩ$(x_i,\ y_i,\ z_i)$とすると、Ｉは４つの面から等距離にある点である。

Ｉと４つの頂点うちの３点を結んでできる、４つの三角柱ＩＡＢＣ，ＩＡＢＤ，ＩＡＣＤ，ＩＢＣＤは底面の面積が等しく、高さも等しくｒなので同じ体積である。従って、４つの三角柱の体積の合計は正四面体の体積に一致する。三角柱の体積はｒを使って表すことができ、そこからｒが求められる。

底面の面積 $S=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$、正四面体の体積 は$V=\frac{\sqrt{2}}{12}$ であるから、$\frac{\sqrt{3}}{4}\times r\times\frac{1}{3}\times 4=\frac{\sqrt{2}}{12}$

これから $r=\frac{\sqrt{6}}{12}$、以上より正四面体の内接球の半径は $\mathrm{r}=\frac{\sqrt{6}}{12}$ 、中心座標は $\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{6}}{12}\right)$ である。

内接球の半径は、外接球の半径の $\frac{1}{3}$，それぞれの中心座標は一致している。

次に、一般の四面体について考えてみる。四面体は４つの面が異なった三角形によって構成されるもので、正四面体に比べてかなり複雑である。

四面体の各頂点の座標を、Ａ$(a_1,\ a_2,\ a_3)$,
Ｂ$(b_1,\ b_2,\ b_3)$, Ｃ$(c_1,\ c_2,\ c_3)$, Ｄ$(d_1,\ d_2,\ d_3)$ とし、
配置の条件として、

① 頂点ＤはＺ軸上に一致させる
② 辺ＢＣはＸ軸に平行にする
③ ⊿ＡＢＣはＸＹ平面上とする

ある面をＸＹ平面に一致させ、うち１辺をＸ軸と平行にし、そのときの頂点ＤをＸ，Ｙ軸の交点に配置することは、どのような四面体についても可能であり、この３つの配置上の条件は特別なものではなく一般性は失われない。それを図にしたのが図２である。

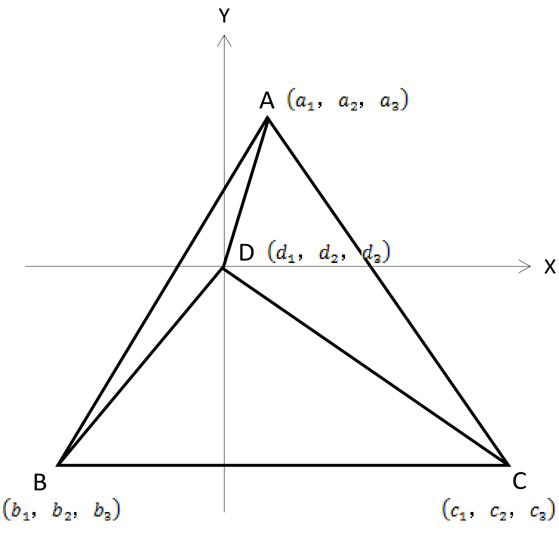


図２

この条件により、$a_3=0$，$b_3=0$，$c_3=0$，$b_2=c_2$，

$d_1 = d_2 = 0$ とすることができ計算が簡略化される。

（1）表面積

$$⊿\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}(c_1 - b_1)(a_2 - b_2)$$

$$⊿\mathrm{ABD} = \frac{1}{2}\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \cdot \sqrt{\frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)^2}{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} + {d_3}^2}$$

$$⊿\mathrm{ACD} = \frac{1}{2}\sqrt{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2} \cdot \sqrt{\frac{(a_2 c_1 - a_1 c_2)^2}{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2} + {d_3}^2}$$

$$⊿\mathrm{BCD} = \frac{1}{2}(c_1 - b_1)\sqrt{{b_2}^2 + {d_3}^2}$$

以上より、表面積 $= ⊿\mathrm{ABC} + ⊿\mathrm{ABD} + ⊿\mathrm{ACD} + ⊿\mathrm{BCD}$

$$= \frac{1}{2}(c_1 - b_1)(a_2 - b_2) + \frac{1}{2}\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \cdot \sqrt{\frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)^2}{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} + {d_3}^2}$$

$$+ \frac{1}{2}(c_1 - b_1)\sqrt{{b_2}^2 + {d_3}^2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2} \cdot \sqrt{\frac{(a_2 c_1 - a_1 c_2)^2}{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2} + {d_3}^2}$$

$$= \frac{1}{2}(c_1 - b_1)(a_2 - b_2) + \frac{1}{2}\sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + {d_3}^2[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]}$$

$$+ \frac{1}{2}(c_1 - b_1)\sqrt{{b_2}^2 + {d_3}^2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 + {d_3}^2[(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2]}$$

（2）体 積

$$⊿\mathrm{ABC}\text{の面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(c_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdot d_3$$

（3）外接球の中心座標

外接球半径をＲとすると、各頂点からの距離はＲに等しいので ①～④式が成り立つ。

$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = R^2$ -------------- ①

$(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 + (z - b_3)^2 = R^2$ -------------- ②

$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = R^2$ -------------- ③

$(x - d_1)^2 + (y - d_2)^2 + (z - d_3)^2 = R^2$ -------------- ④

①－②を作ると、$2(a_1 - b_1)x + 2(a_2 - b_2)y + 2(a_3 - b_3)z = ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2) - ({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2)$

①－③を作ると、$2(a_1 - c_1)x + 2(a_2 - c_2)y + 2(a_3 - c_3)z = ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2) - ({c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2)$

①－④を作ると、$2(a_1 - d_1)x + 2(a_2 - d_2)y + 2(a_3 - d_3)z = ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2) - ({d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2)$

これを解いて、

$$x=\frac{(a_2-c_2)\left[(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)-\left(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2\right)\right]-\ (a_2-b_2)[(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)-(c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2)]}{2[(a_1-b_1)(a_2-c_2)-(a_2-b_2)(a_1-c_1)]}$$

$$y=\frac{(a_1-c_1)\left[(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)-\left(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2\right)\right]-\ (a_1-b_1)[(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)-(c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2)]}{2[(a_2-b_2)(a_1-c_1)-(a_2-c_2)(a_1-b_1)]}$$

$$z=$$

$$\frac{[(b_1c_2-b_2c_1)+d_1(b_2-c_2)-d_2(b_1-c_1)](a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)-[(a_1c_2-a_2c_1)+d_1(a_2-c_2)-d_2(a_1-c_1)]\left(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2\right)}{2(a_3-d_3)[(a_1-b_1)(a_2-c_2)-(a_2-b_2)(a_1-c_1)]}$$

$$+\frac{[(a_1b_2-a_2b_1)+d_1(a_2-b_2)-d_2(a_1-b_1)](c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2)-[(a_1-b_1)(a_2-c_2)-(a_2-b_2)(a_1-c_1)]\left(d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2\right)}{2(a_3-d_3)[(a_1-b_1)(a_2-c_2)-(a_2-b_2)(a_1-c_1)]}$$

$a_3=0$，$b_3=0$，$c_3=0$，$d_1=d_2=0$ を考慮すると、

$$x=\frac{(b_2-c_2)(a_1{}^2+a_2{}^2)-(a_2-c_2)\left(b_1{}^2+b_2{}^2\right)+(a_2-b_2)(c_1{}^2+c_2{}^2)}{2[(a_1-b_1)(a_2-c_2)-(a_2-b_2)(a_1-c_1)]}$$

$$y=-\frac{(b_1-c_1)(a_1{}^2+a_2{}^2)-\ (a_1-c_1)\left(b_1{}^2+b_2{}^2\right)+(a_1-b_1)(c_1{}^2+c_2{}^2)}{2[(a_1-b_1)(a_2-c_2)-(a_2-b_2)(a_1-c_1)]}$$

$$z=-\frac{(b_1c_2-b_2c_1)(a_1{}^2+a_2{}^2)-(a_1c_2-a_2c_1)\left(b_1{}^2+b_2{}^2\right)+(a_1b_2-a_2b_1)(c_1{}^2+c_2{}^2)}{2d_3[(a_1-b_1)(a_2-c_2)-(a_2-b_2)(a_1-c_1)]}+\frac{d_3}{2}$$

さらに $b_2=c_2$ を考慮すると、

$$x=\frac{\left(b_1{}^2+b_2{}^2\right)-(c_1{}^2+c_2{}^2)}{2(b_1-c_1)}=\frac{b_1+c_1}{2}$$

$$y=\frac{(b_1-c_1)(a_1{}^2+a_2{}^2)-\ (a_1-c_1)\left(b_1{}^2+b_2{}^2\right)+(a_1-b_1)(c_1{}^2+c_2{}^2)}{2(a_2-b_2)(b_1-c_1)}$$

$$z=\frac{(b_1c_2-b_2c_1)(a_1{}^2+a_2{}^2)-(a_1c_2-a_2c_1)\left(b_1{}^2+b_2{}^2\right)+(a_1b_2-a_2b_1)(c_1{}^2+c_2{}^2)}{2d_3(a_2-b_2)(b_1-c_1)}+\frac{d_3}{2}$$

（４）外接球の半径

④式を用いて、$d_1=d_2=0$ から、$x^2+y^2+(z-d_3)^2=R^2$

この式に（３）で求めた x，y，zを入れて、$R=\sqrt{x^2+y^2+(z-d_3)^2}$ と計算できる。

（非常に長い式になるので省略）

（５）内接球の中心座標

内接球半径をｒとすると、内接球の中心から４つの面までの距離がｒに等しい。

まず、４面ＡＢＣ，ＡＢＤ，ＡＣＤ，ＢＣＤを式で表すため、各面のX，Y，Z軸との交点を求めると、

ＡＢＣ$\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2-b_2},\ \frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1-b_1},\ 0\right)$，ＡＢＤ$\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2-b_2},\ \frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1-b_1},\ d_3\right)$

ＡＣＤ$\left(\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_2-c_2},\ \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1-c_1},\ d_3\right)$，ＢＣＤ$\left(\frac{b_2c_1-b_1c_2}{b_2-c_2},\ \frac{b_1c_2-b_2c_1}{b_1-c_1},\ d_3\right)$

以上の座標から各面の式は次のように表される。

面ＡＢＣ $\dfrac{x}{\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2-b_2}}+\dfrac{y}{\dfrac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1-b_1}}=1$ 　面ＡＢＤ $\dfrac{x}{\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2-b_2}}+\dfrac{y}{\dfrac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1-b_1}}+\dfrac{z}{d_3}=1$

面ＡＣＤ $\dfrac{x}{\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{a_2-c_2}}+\dfrac{y}{\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1-c_1}}+\dfrac{z}{d_3}=1$ 　面ＢＣＤ $\dfrac{x}{\dfrac{b_2c_1-b_1c_2}{b_2-c_2}}+\dfrac{y}{\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{b_1-c_1}}+\dfrac{z}{d_3}=1$

平面 $ax+by+cz+d=0$ と点 $(l，m，n)$との距離は、

$\dfrac{|al+bm+cn+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ と表せる。それぞれの面と内接球の中心からの距離は、内接球の中心座標を $(x_i，y_i，z_i)$ とすると、⑤～⑧で表される。

$$\frac{\left|\dfrac{a_2-b_2}{a_2b_1-a_1b_2}x_i+\dfrac{a_1-b_1}{a_1b_2-a_2b_1}y_i-1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{a_2-b_2}{a_2b_1-a_1b_2}\right)^2+\left(\dfrac{a_1-b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)^2}}=r \qquad \text{-------------------------⑤}$$

$$\frac{\left|\dfrac{a_2-b_2}{a_2b_1-a_1b_2}x_i+\dfrac{a_1-b_1}{a_1b_2-a_2b_1}y_i+\dfrac{1}{d_3}z_i-1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{a_2-b_2}{a_2b_1-a_1b_2}\right)^2+\left(\dfrac{a_1-b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)^2+\left(\dfrac{1}{d_3}\right)^2}}=r \qquad \text{-------------------------⑥}$$

$$\frac{\left|\dfrac{a_2-c_2}{a_2c_1-a_1c_2}x_i+\dfrac{a_1-c_1}{a_1c_2-a_2c_1}y_i+\dfrac{1}{d_3}z_i-1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{a_2-c_2}{a_2c_1-a_1c_2}\right)^2+\left(\dfrac{a_1-c_1}{a_1c_2-a_2c_1}\right)^2+\left(\dfrac{1}{d_3}\right)^2}}=r \qquad \text{-------------------------⑦}$$

$$\frac{\left|\dfrac{b_2-c_2}{b_2c_1-b_1c_2}x_i+\dfrac{b_1-c_1}{b_1c_2-b_2c_1}y_i+\dfrac{1}{d_3}z_i-1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{b_2-c_2}{b_2c_1-b_1c_2}\right)^2+\left(\dfrac{b_1-c_1}{b_1c_2-b_2c_1}\right)^2+\left(\dfrac{1}{d_3}\right)^2}}=r \qquad \text{-------------------------⑧}$$

$z_i=r$ は明らかである。式の対称性を考慮して⑥，⑦，⑧式を解いて、$x_i，y_i$ を求める。$x_i，y_i$ は非常に長い式になるので、分母と分子を分けて記すと以下のとおりとなる。

x_i 分母

$$\frac{a_2-b_2}{a_2b_1-a_1b_2}\left(\frac{a_1-c_1}{a_1c_2-a_2c_1}-\frac{b_1-c_1}{b_1c_2-b_2c_1}\right)+\frac{a_2-c_2}{a_2c_1-a_1c_2}\left(\frac{b_1-c_1}{b_1c_2-b_2c_1}-\frac{a_1-b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)+\frac{b_2-c_2}{b_2c_1-b_1c_2}\left(\frac{a_1-b_1}{a_1b_2-a_2b_1}-\frac{a_1-c_1}{a_1c_2-a_2c_1}\right)$$

b_2-c_2 を考慮すると、

$$\frac{1}{b_2}\frac{(a_2-b_2)^2(b_1-c_1)}{(a_1b_2-a_2b_1)(a_1c_2-a_2c_1)}$$

x_i 分子

$$\left[\left(\frac{a_1-c_1}{a_1c_2-a_2c_1}-\frac{b_1-c_1}{b_1c_2-b_2c_1}\right)\sqrt{\frac{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}{(a_1b_2-a_2b_1)^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}+\left(\frac{b_1-c_1}{b_1c_2-b_2c_1}-\frac{a_1-b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)\sqrt{\frac{(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2}{(a_1c_2-a_2c_1)^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{a_1-b_1}{a_1b_2-a_2b_1}-\frac{a_1-c_1}{a_1c_2-a_2c_1}\right)\sqrt{\frac{(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2}{(b_1c_2-b_2c_1)^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}\right]r$$

b_2-c_2 を考慮すると、

$$\left[\left(\frac{a_1-c_1}{a_1c_2-a_2c_1}-\frac{1}{b_2}\right)\sqrt{\frac{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}{(a_1b_2-a_2b_1)^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}+\left(\frac{1}{b_2}-\frac{a_1-b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)\sqrt{\frac{(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2}{(a_1c_2-a_2c_1)^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{a_1-b_1}{a_1b_2-a_2b_1}-\frac{a_1-c_1}{a_1c_2-a_2c_1}\right)\sqrt{\frac{1}{{b_2}^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}\right]r$$

y_i 分母は、x_i 分母の符号を変えたものである。

y_i 分子

$$\left[\left(-\frac{a_2-c_2}{a_1c_2-a_2c_1}+\frac{b_2-c_2}{b_1c_2-b_2c_1}\right)\sqrt{\frac{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}{(a_1b_2-a_2b_1)^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}+\left(-\frac{b_2-c_2}{b_1c_2-b_2c_1}+\frac{a_2-b_2}{a_1b_2-a_2b_1}\right)\sqrt{\frac{(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2}{(a_1c_2-a_2c_1)^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{a_2-b_2}{a_1b_2-a_2b_1}+\frac{a_2-c_2}{a_1c_2-a_2c_1}\right)\sqrt{\frac{(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2}{(b_1c_2-b_2c_1)^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}\right]r$$

b_2-c_2 を考慮すると、

$$\left[\left(-\frac{a_2-c_2}{a_1c_2-a_2c_1}\right)\sqrt{\frac{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}{(a_1b_2-a_2b_1)^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}+\left(\frac{a_2-b_2}{a_1b_2-a_2b_1}\right)\sqrt{\frac{(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2}{(a_1c_2-a_2c_1)^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{a_2-b_2}{a_1b_2-a_2b_1}+\frac{a_2-c_2}{a_1c_2-a_2c_1}\right)\sqrt{\frac{1}{{b_2}^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}\right]r$$

$Z_i=r$

以上で、内接球中心の座標 x_i，y_i，z_i は全て r の関数として求められた。

（６）内接球の半径

内接球の中心座標 x_i，y_i が r の関数として求められたので、内接球の半径は⑤に x_i，y_i を入れて計算すればよいが、非常に複雑な計算となる。そこで、（１）（２）で求めた表面積と体積により求める。

４つの面の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3，S_4 、体積を V とすると、

$\dfrac{1}{3}r\,(S_1+S_2+S_3+S_4)=V$ が成り立つので、$r=\dfrac{3\cdot\frac{1}{6}(c_1-b_1)(a_2-b_2)\cdot d_3}{S_1+S_2+S_3+S_4}$ から求められ、

$r=\dfrac{\frac{1}{2}(c_1-b_1)(a_2-b_2)\cdot d_3}{S_1+S_2+S_3+S_4}$ となる。ここで、$S_1+S_2+S_3+S_4$ は（１）で求めた

$$S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{1}{2}(c_1-b_1)(a_2-b_2)+\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2+{d_3}^2[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2]}$$

$$+\frac{1}{2}(c_1-b_1)\sqrt{{b_2}^2+{d_3}^2}+\frac{1}{2}\sqrt{(a_1c_2-a_2c_1)^2+{d_3}^2[(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2]}$$ である。

一般の四面体の場合はかなり複雑な式となることがわかる。

以上をまとめると次の表のとおりとなる。

	四 面 体
表面積	$\frac{1}{2}(c_1-b_1)(a_2-b_2)+\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2+{d_3}^2[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2]}$ $+\frac{1}{2}(c_1-b_1)\sqrt{{b_2}^2+{d_3}^2}+\frac{1}{2}\sqrt{(a_1c_2-a_2c_1)^2+{d_3}^2[(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2]}$
体　積	$\frac{1}{6}(c_1-b_1)(a_2-b_2)\cdot d_3$
外接球座標	$x=\frac{b_1+c_1}{2}$ $y=\frac{(b_1-c_1)({a_1}^2+{a_2}^2)-(a_1-c_1)({b_1}^2+{b_2}^2)+(a_1-b_1)({c_1}^2+{c_2}^2)}{2(a_2-b_2)(b_1-c_1)}$ $z=\frac{(b_1c_2-b_2c_1)({a_1}^2+{a_2}^2)-(a_1c_2-a_2c_1)({b_1}^2+{b_2}^2)+(a_1b_2-a_2b_1)({c_1}^2+{c_2}^2)}{2d_3(a_2-b_2)(b_1-c_1)}+\frac{d_3}{2}$
外接球半径	上記の外接球座標 x，y，z を $R=\sqrt{x^2+y^2+(z-d_3)^2}$ に代入
内接球座標	$x(分子)=\Bigg[\left(\frac{a_1-c_1}{a_1c_2-a_2c_1}-\frac{1}{b_2}\right)\sqrt{\frac{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}{(a_1b_2-a_2b_1)^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}$ $+\left(\frac{1}{b_2}-\frac{a_1-b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)\sqrt{\frac{(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2}{(a_1c_2-a_2c_1)^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}$ $+\left(\frac{a_1-b_1}{a_1b_2-a_2b_1}-\frac{a_1-c_1}{a_1c_2-a_2c_1}\right)\sqrt{\frac{1}{{b_2}^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}\Bigg]$ $x(分母)=\frac{1}{b_2}\frac{(a_2-b_2)^2(b_1-c_1)}{(a_1b_2-a_2b_1)(a_1c_2-a_2c_1)}$

	$$y(\text{分子})=\left[\left(-\frac{a_2-c_2}{a_1c_2-a_2c_1}\right)\sqrt{\frac{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}{(a_1b_2-a_2b_1)^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}+\left(\frac{a_2-b_2}{a_1b_2-a_2b_1}\right)\sqrt{\frac{(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2}{(a_1c_2-a_2c_1)^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}+\left(-\frac{a_2-b_2}{a_1b_2-a_2b_1}+\frac{a_2-c_2}{a_1c_2-a_2c_1}\right)\sqrt{\frac{1}{{b_2}^2}+\frac{1}{{d_3}^2}}\right]r$$ $$y(\text{分母})=-\frac{1}{b_2}\frac{(a_2-b_2)^2(b_1-c_1)}{(a_1b_2-a_2b_1)(a_1c_2-a_2c_1)}\quad\left[x\left(\text{分母}\right)\text{の符号を変えたもの}\right]$$ $z=$ 内接球半径に等しい
内接球半径	$r=\dfrac{\frac{1}{2}(c_1-b_1)(a_2-b_2)\cdot d_3}{S_1+S_2+S_3+S_4}$ （$S_1+S_2+S_3+S_4$ は表面積）

正四面体と一般の四面体について、具体的な数値を入れて「表面積」,「体積」,「外接球の中心座標」,「外接球半径」,「内接球の中心座標」,「外接球半径」を計算して比較してみよう。

それぞれの四面体について、比較のため６辺の合計長さを同一とし、かつ一般の四面体については、正四面体と比べ歪の度合いを大きくした。

四面体Ⅰ，Ⅱの座標はできるだけ整数とし、正四面体については、辺の合計長さを一致させたため整数になっていない。

それぞれの座標は以下の通りである。

正四面体：A$(0,\ 4.57,\ 0)$，B$(-3.96,\ -2.28,\ 0)$，C$(4,\ -2.28,\ 0)$，D$(0,\ 0,\ 6.46)$

四面体Ⅰ：A$(-2,\ 4,\ 0)$，B$(2,\ -5,\ 0)$，C$(6,\ -5,\ 0)$，D$(0,\ 0,\ 4.07)$

四面体Ⅱ：A$(1,\ 2,\ 0)$，B$(-2,\ -1,\ 0)$，C$(3,\ -1,\ 0)$，D$(0,\ 0,\ 11.26)$

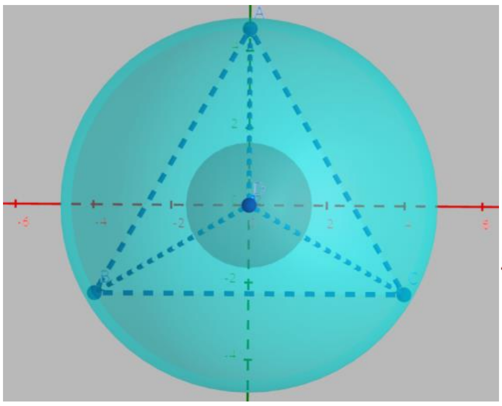
比較表だけでは分かりにくいので、ネット上に公開されているソフト（Geogebra）を使って立体図形を描いたので合わせて掲載する。

一般の四面体について、Ⅰは底面が大きく鈍角三角形のもの、Ⅱは底面が小さく高さを大きくし、敢えて歪を大きくした。そのため、正四面体と比較して、一般の四面体の内接球は小さく外接球は大きくなっている。

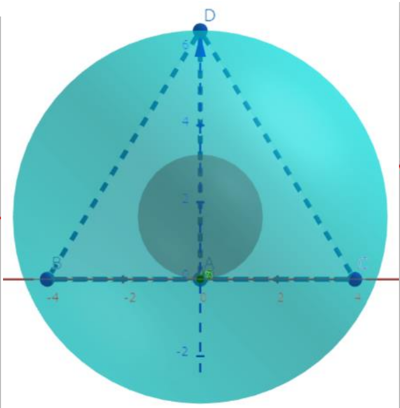
まとめ

	正　四　面　体	四　面　体（Ⅰ）	四　面　体（Ⅱ）
各辺の長さ	AB：7.915　DA：7.915 BC：7.915　DB：7.915 CA：7.915　DC：7.915 合計：47.492	AB：9.849　DA：6.046 BC：4.000　DB：6.749 CA：12.012　DC：8.806 合計：47.492	AB：4.243　DA：11.476 BC：5.000　DB：11.476 CA：3.606　DC：11.692 合計：47.492
辺合計長さ比	1	1	1
表面積	108.518	76.431	80.267
表面積比	1	0.704	0.740
体　積	58.444	24.412	28.140
体積比	1	0.418	0.481
外接球中心座標	$x = 0$ $y = 0$ $z = 1.616$	$x = 4.000$ $y = 1.278$ $z = -1.133$	$x = 0.500$ $y = -0.500$ $z = 5.361$
外接球半径	$R = 4.847$	$R = 6.685$	$R = 5.937$
外接球半径比	1	1.379	1.225
内接球中心座標	$x = 0$ $y = 0$ $z = 1.616$	$x = 1.904$ $y = -2.304$ $z = 0.958$	$x = 0.733$ $y = 0.149$ $z = 1.052$
内接球半径	$r = 1.616$	$r = 0.958$	$r = 1.052$
内接球半径比	1	0.593	0.651
内接球/内接球半径比	$R/r = 3$	$R/r = 6.977$	$R/r = 5.644$
外接球と内接球の中心距離	0	4.647	4.365

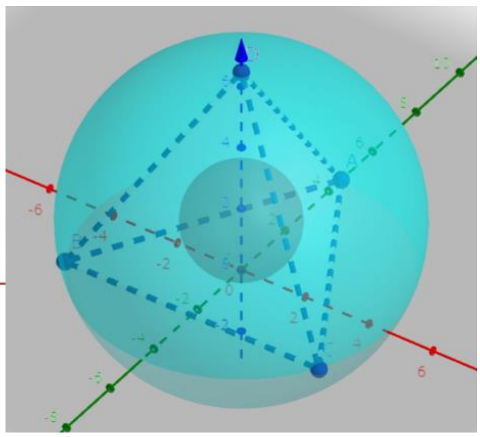
正四面体



① 上から見た図

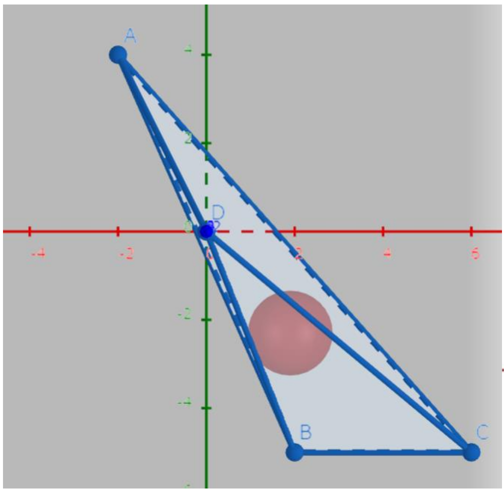


② 側面から見た図

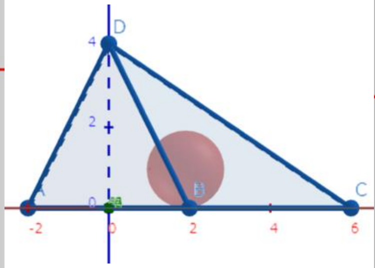


③ 斜め上から見た図

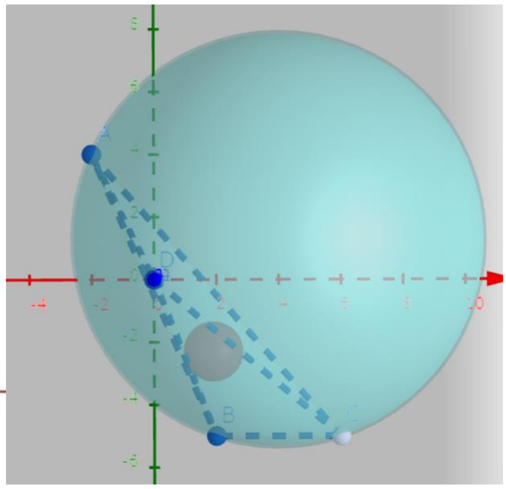
四面体（Ｉ）



④ 上から見た図

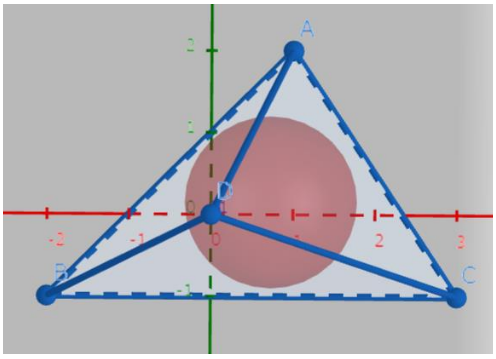


⑤ 側面から見た図

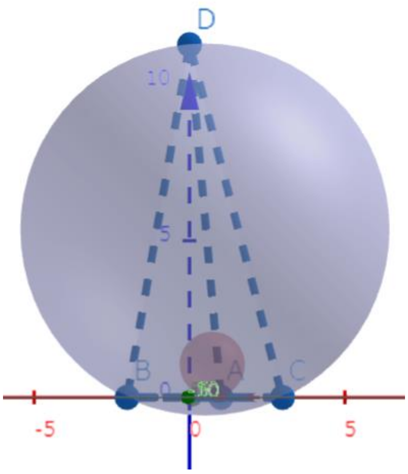


⑥ 上から見た図
外接球含み（④⑤と縮尺異なる）

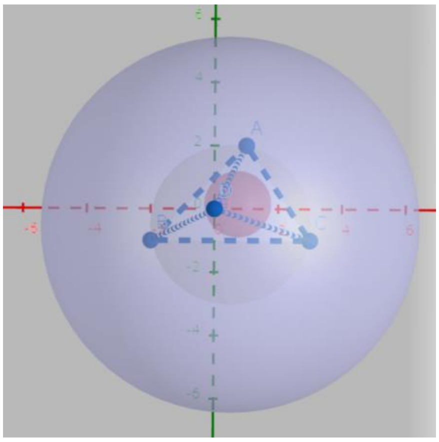
四面体（Ⅱ）



⑦ 上から見た図



⑧ 側面から見た図
外接球含み（⑦と縮尺異なる）



⑨ 上から見た図
外接球含み（⑦と縮尺異なる）

一般の四面体について検討されたものが少ないので、その表面積, 体積, 外接球半径とその中心座標, 内接球半径とその中心座標を求める一般式を作ってみた。正四面体と一般の四面体を比較することにそれほど意味があると思えないが、一般式は想像していた以上に複雑な式となったのが驚きだった。

（２０２２．０２．２２）