１２６「正四面体と立方体」

易しそうで思ったより手ごわい問題

一辺が１の正四面体の内部で、一辺の長さがａである立方体を動かすとき、ａの最大値を求めよ。
ただし表面も内部に含むものとする。
（どういう場合が最大か予想はつくし、その場合の　a　も出すのは容易だが、本当にそれが最大である証明ができない。平面で三角形に内接する正方形の話と同じ手法を取ったがこれでは無理なのか？）

「正四面体の中に立方体を入れたときの最大の大きさは？」という問題。
直感的には図１のように、立方体の１面が正四面体の面（底面）に接し、立方体の中心が底面の正三角形の中心にある場合が最も大きそうだ。

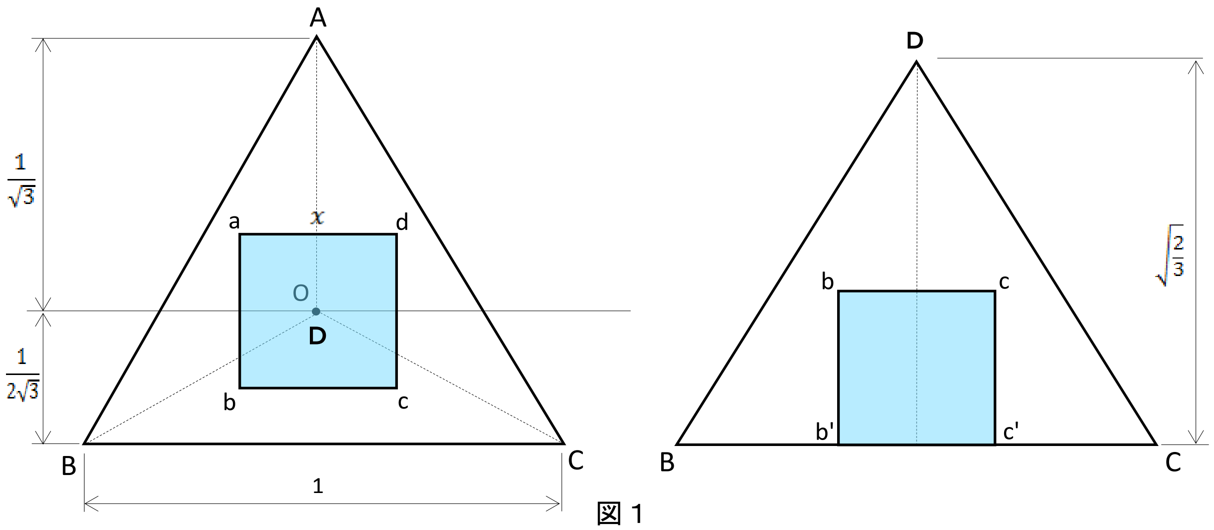


図１

この状態で立方体の大きさを計算してみよう。
立方体の一辺ｂｃが正四面体の斜めの面ＤＢＣに接する場合である。（図２）

底面に対する面ＤＢＣの傾きは、$\sqrt{\frac{2}{3}} \div \frac{1}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$ なので、

立方体の一辺を x として、

$\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{x}{2}\right) \cdot 2\sqrt{2} = x$ これを解いて、$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(1+\sqrt{2})} = 0.338$

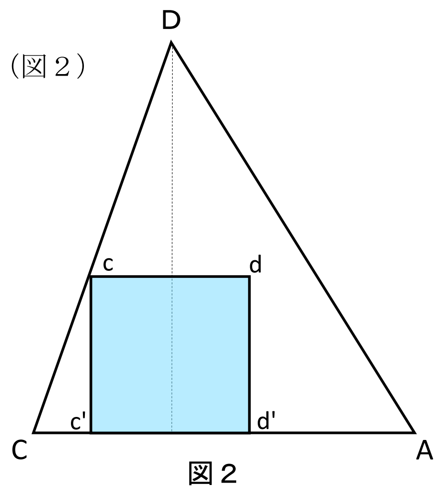


図２

これが本当に最大値だろうか？立方体の点ａと面ＤＡＢ、または点ｄと面ＤＡＣが接していないか？それを確認する必要がある。拡大図（図３）において、∠ＰＡＱ＝３０°から、

$PQ = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right\}$、$Pd = \frac{x}{\sqrt{3}}$ だから、$dQ = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right\} - \frac{x}{\sqrt{3}}$ となる。

点ｄが底面からの高さ x の位置で面ＤＡＣに接していないことが必要なので、

$\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right\}-\frac{x}{\sqrt{3}}\right]\cdot 2\sqrt{2}$ が x 以上であればよい。

この値が x より大きければ、まだ余裕があるということになり、より大きな立方体が内接できる。

$$\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\right\}-\frac{x}{\sqrt{3}}\right]\cdot 2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}x$$

$= 0.816 - 1.932\,x = 0.816 - 1.932 \times 0.338 = 0.163 < 0.338$ となり x 以下なので、点ａと面ＯＡＢ、及び点ｄと面ＯＡＣは接していることになり、一辺 0.338 の立方体は大きすぎて内接することができない。やはり直感ではだめで、より詳細な検討が必要である。

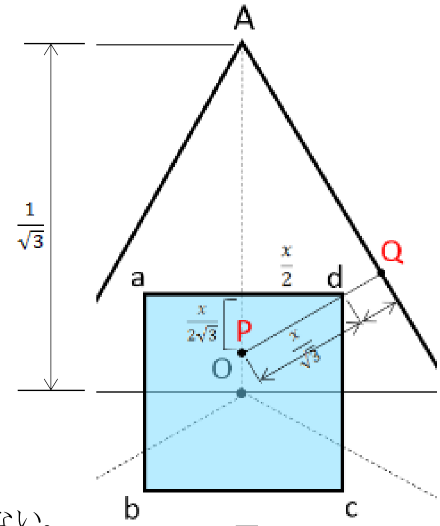
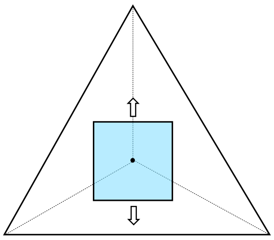


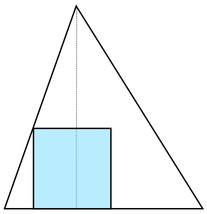
図３

検討すべきことを整理する。

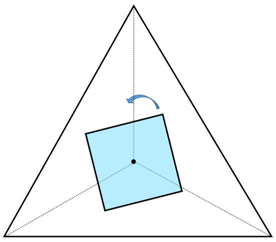
図１に示す状態を基本位置とし、それからどのように変化させるかを示す。

（１） 立方体の一面が正四面体の一面（底面とする）に接した状態で、底面の正三角形の軸線に沿って上下に動かす

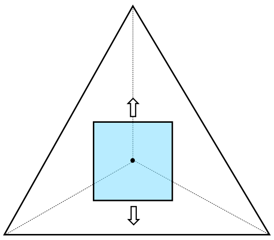

見下げ図

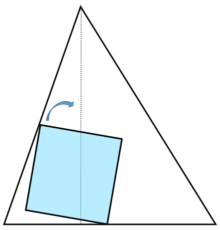

側面図

（２）（１）の状態から反時計回りに回転させる

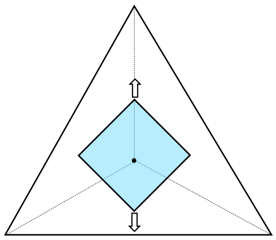

見下げ図

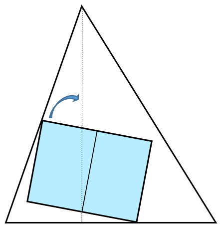
（３）（１）の状態から立方体の一辺が底面に接した状態で傾斜させる


見下げ図


側面図

（４）（１）の状態から立方体を９０°回転させ、立方体の角が底面に接した状態で傾斜させる


見下げ図


側面図

この他にもいくつか状態が考えられるが、立方体が全く正四面体に接することなく宙に浮いている状態などを含め、いずれも不利なので検討対象から除外する。

（１）立方体の一面が正四面体の底面に接した状態で、底面の正三角形の軸線に沿って上下に動かす

１辺 x の立方体を中心線に沿って、下に y だけ移動した場合を考える。

面ＤＢＣに接近する部分の式

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{x}{2}-y\right)\cdot 2\sqrt{2}=x \quad \text{-------------------------①}$$

面ＤＡＣに接近する部分の式（図３の検討により）

$$\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{x}{2}+y\right)+\frac{x}{2\sqrt{3}}\right\}-\frac{x}{\sqrt{3}}\right]\cdot 2\sqrt{2}=x \quad \text{---------②}$$

①②の連立方程式を解いて、

$$x=\frac{6}{6+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}=0.2959,\quad y=\frac{\sqrt{3}-1}{6+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}=0.0361$$

以上より、下に 0.0361 だけ移動した場合、

立方体の一辺は 0.2959 という結果が得られた。

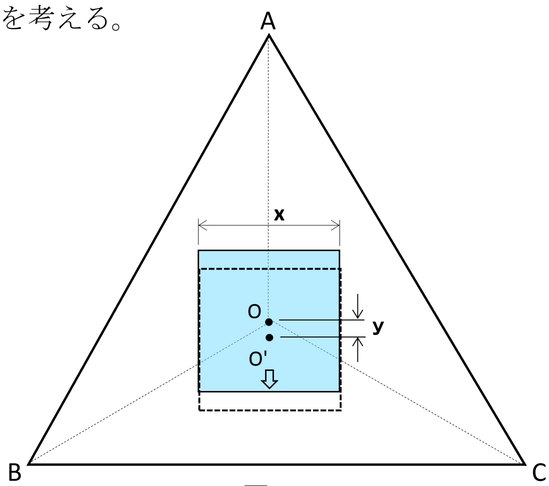


図４

（２）下方向に動かし、さらに回転させる

１辺 x の立方体を中心線に沿って下に y だけ移動し、角度 $\theta(rad)$ 回転させた場合を考える。ただし、$\theta=\frac{\pi}{6}$ $(30°)$以上回転させると立方体の辺ｃｄが正四面体の面ＤＡＣに平行になるので、$0<\theta\leq\frac{\pi}{6}$ とする。

中心Ｏを原点とするＸ－Ｙ－Ｚ３次元座標において、面ＤＡＢ，ＤＡＣ，ＤＢＣに接近するａ，ｂ，ｄの座標は次のように表せる。

ａ $\left(-\frac{x}{2},\ \frac{x}{2},\ x\right)$，　ｂ $\left(-\frac{x}{2},\ -\frac{x}{2},\ x\right)$，　ｄ $\left(\frac{x}{2},\ \frac{x}{2},\ x\right)$

立方体を反時計方向に θ 回転させ、下方向に y 平行移動したときのａ，ｂ，ｄの座標は次のように表される。

ａ $\left[(-\cos\theta-\sin\theta)\frac{x}{2},\ (\cos\theta-\sin\theta)\frac{x}{2}+y,\ x\right]$

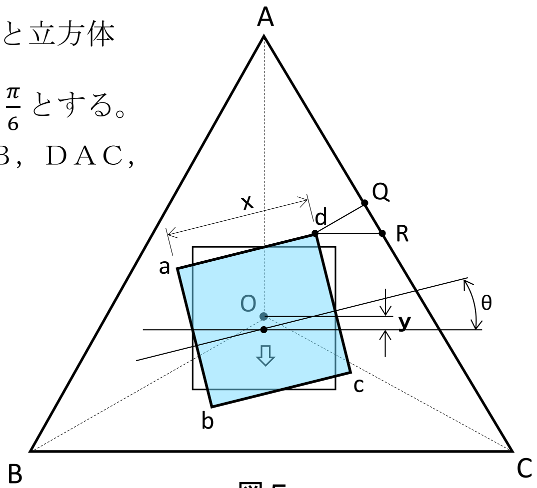


図５

b $\left[(-\cos\theta+\sin\theta)\dfrac{x}{2},\ (-\cos\theta-\sin\theta)\dfrac{x}{2}+y,\ x\right]$

d $\left[(\cos\theta-\sin\theta)\dfrac{x}{2},\ (\cos\theta+\sin\theta)\dfrac{x}{2}+y,\ x\right]$

点ａについて、面ＤＡＢとの距離は次のように表せる。

面ＤＡＢは、X，Y，Z 軸と$\left(\dfrac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$，$\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$，$\left(0,\ 0,\ \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$と交差するので、

$-3X+\sqrt{3}\mathrm{Y}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}Z=1$ と表され、点と平面の距離の式より、

$$\text{点ａと面ＤＡＢ距離}=\frac{\left|-3(-\cos\theta-\sin\theta)\frac{x}{2}+\sqrt{3}\left[(\cos\theta-\sin\theta)\frac{x}{2}+y\right]+\sqrt{\frac{3}{2}}x-1\right|}{\sqrt{\left((-3)^2+\sqrt{3}^2+\sqrt{\frac{3}{2}}^2\right)}}\qquad\text{--------------③}$$

同様にｂ，ｄの各点について、面ＤＢＣ，ＤＡＣとの距離は、

$$\text{点ｂと面ＤＢＣの距離}=\frac{\left|-2\sqrt{3}(-\cos\theta-\sin\theta)\frac{x}{2}-2\sqrt{3}y+\sqrt{\frac{3}{2}}x-1\right|}{\sqrt{\left(\left(2\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{2}}^2\right)}}\qquad\text{-------------------------④}$$

$$\text{点ｄと面ＤＡＣの距離}=\frac{\left|3(\cos\theta-\sin\theta)\frac{x}{2}+\sqrt{3}\left[(\cos\theta+\sin\theta)\frac{x}{2}+y\right]+\sqrt{\frac{3}{2}}x-1\right|}{\sqrt{\left(3^2+\sqrt{3}^2+\sqrt{\frac{3}{2}}^2\right)}}\qquad\text{-----------------⑤}$$

点ａ，ｂ，ｄがそれぞれの面に接する（距離が０となる）x，y，θ は、③④⑤を解くことで求められる。
変形すると、

$$\left|-3(-\cos\theta-\sin\theta)\frac{x}{2}+\sqrt{3}\left[(\cos\theta-\sin\theta)\frac{x}{2}+y\right]+\sqrt{\frac{3}{2}}x-1\right|=0\qquad\text{-------------------------⑥}$$

$$\left|-2\sqrt{3}(-\cos\theta-\sin\theta)\frac{x}{2}-2\sqrt{3}y+\sqrt{\frac{3}{2}}x-1\right|=0\qquad\text{-------------------------⑦}$$

$$\left|3(\cos\theta-\sin\theta)\frac{x}{2}+\sqrt{3}\left[(\cos\theta+\sin\theta)\frac{x}{2}+y\right]+\sqrt{\frac{3}{2}}x-1\right|=0\qquad\text{-------------------------⑧}$$

これを解いて、

$x=\dfrac{6}{6+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}=0.2959$，$y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{6+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}=0.0361$，$\theta=0$ が得られるが、これは（１）で求め

た結果と同じである。このことから、立方体の１つの面が正四面体の１つの面に接した状態で回転させても、立方体の大きさを大きくすることには繋がらないことがわかった。

（３）（１）の状態から立方体の一辺が底面に接した状態で傾斜させる

図２の位置から、図６に示すように立方体の１辺ａ’ｄ’を正四面体の底面に接した状態で傾斜させた場合を考える。徐々に角度を増していくと、図７のように立方体の１面が面ＤＢＣに接した状態となり、さらに傾斜させていくと、図８のように立方体の面ａｂｃｄが、正四面体の１辺ＤＡに平行になる。

図６から図８の状態において、立方体の大きさがどこまで大きくできるかを考える。

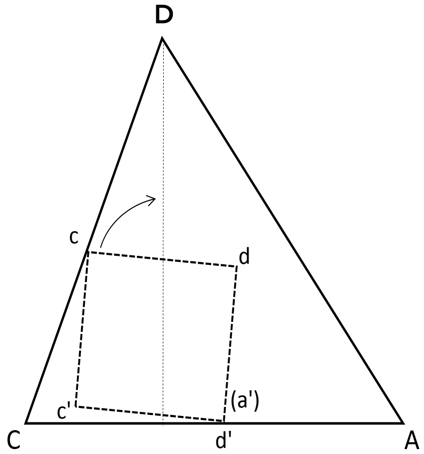


図６

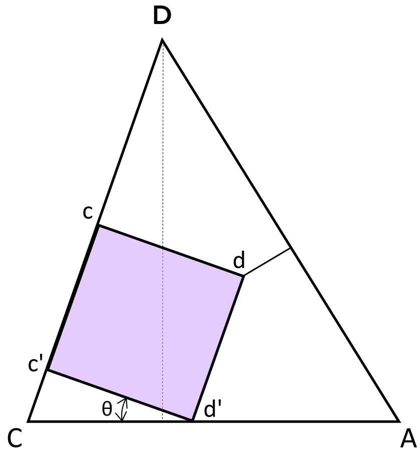


図７

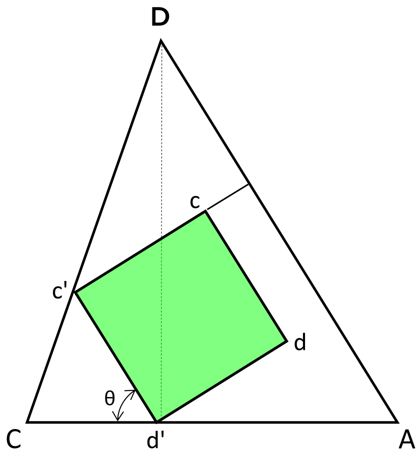


図８

θを変化させたとき、図７の位置における立方体の傾きは、$\theta = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(2\sqrt{2}\right) = 19.47^\circ$

図８の位置における傾きは、$\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right) = 54.74^\circ$ である。

$0 < \theta \leq 19.47^\circ$ 及び、$19.47^\circ < \theta \leq 54.74^\circ$ の範囲で点ｄと正四面体との距離を調べる。

$0 < \theta \leq 19.47^\circ$ における点ｄと面ＤＡＣの距離について、

点ｄの座標は、$\left[\dfrac{x}{2},\ x\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\sin\theta + \cos\theta) + \cos\theta\right\} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ x\cos\theta\right]$ と表せるので、

面ＤＡＣの式 $3X + \sqrt{3}Y + \sqrt{\dfrac{3}{2}}Z = 1$ より、

$$\text{点ｄと面ＤＡＣの距離} = \frac{\left|3\left(\dfrac{x}{2}\right) + \sqrt{3}\left[x\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\sin\theta + \cos\theta) + \cos\theta\right\} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right] + \sqrt{\dfrac{3}{2}}x\cos\theta - 1\right|}{\sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2 + \sqrt{\dfrac{3}{2}}^2}} \quad \text{-----------⑨}$$

$19.47^\circ < \theta \leq 54.74^\circ$ における点ｄと面ＤＡＣの距離

点ｄの座標は、$\left[\dfrac{x}{2},\ x\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin\theta + \sin\theta + \cos\theta\right\} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ x\cos\theta\right]$ と表せるので、 -----------⑩

$$\text{点 d と面ＤＡＣの距離} = \frac{\left|3\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{3}\left[x\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\theta + sin\,\theta + cos\,\theta\right\} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right] + \sqrt{\frac{3}{2}}x\,cos\,\theta - 1\right|}{\sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}^2}}$$

⑨⑩式において x を固定した場合、離隔距離は θ の関数で与えられ、最大となる θ は⑨⑩を微分して０と置くことで求められる。

⑨の θ に関する部分のみ取り出して、

$$\sqrt{3}x\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(sin\,\theta + cos\,\theta) + cos\,\theta\right] + \sqrt{\frac{3}{2}}x\,cos\,\theta = \sqrt{3}x\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}sin\,\theta + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)cos\,\theta\right]$$

これを微分して０とおき解くと、$\frac{1}{2\sqrt{2}}cos\,\theta - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)sin\,\theta = 0$　これから、

$$tan\,\theta = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 0.1716\text{、}\qquad \theta = 0.1699(rad) = 9.74^\circ \text{ となる。}$$

よって $sin\,\theta = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$，　$cos\,\theta = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{6}\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$、この値を⑨に入れて距離が 0 となる$x$を求めると

$$\left[\frac{3}{2} + \sqrt{3}\left[\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\frac{3 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{6}\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}\right\}\right]\right]x = \frac{3}{2} \text{ より、} x = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = 0.2929$$

⑩についても同様に、

$$\sqrt{3}x\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\theta + sin\,\theta + cos\,\theta\right] + \sqrt{\frac{3}{2}}x\,cos\,\theta = \sqrt{3}x\left[\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)sin\,\theta + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)cos\,\theta\right]$$

これを微分して０とおき、$\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)cos\,\theta - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)sin\,\theta = 0$ これを解いて、

$$tan\,\theta = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3 - \sqrt{2}}{2} = 0.7929\text{、}\theta = 0.6704(rad) = 38.41^\circ \text{ となる。}$$

よって $sin\,\theta = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}}$，　$cos\,\theta = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}}$、この値を⑩に入れて距離が 0 となる$x$を求めると

$$\left[\frac{3}{2} + \sqrt{3}x\left[\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}}\right]\right] = \frac{3}{2} \text{ より、} x = \frac{2\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}}{6 + \sqrt{2} + 2\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}}$$

$$= 0.2844$$

次に図８点ｃについて、面ＤＡＣとの距離はどうだろうか？

$sin\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，　$cos\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$から、点ｃの座標は、$\left[\frac{x}{2},\ x\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}},\ x\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$ と表せる。

点ｃ と面ＤＡＣの距離$=\dfrac{\left|3\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{3}\left[x\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right]+\sqrt{\frac{3}{2}}x\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-1\right|}{\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2+\sqrt{\frac{3}{2}}^2}}$ ---------------⑪

$3\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{3}\left[x\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right]+\sqrt{\frac{3}{2}}x\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-1=0$ を解いてxを求めると、

$x=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=0.2929$ これは⑨の結果と同じであり、点ｃと点ｄの面ＤＡＣとの距離は等しい。

（４）（１）の状態から立方体を９０°回転させた場合

正四面体の点Ａと立方体の点ａが一致する方向となり条件が良さそうだ。

面ＤＢＣに立方体の点ｃが接した状態であるから次式が成り立つ。

$$\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{x}{\sqrt{2}}+y=\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{---------------⑫}$$

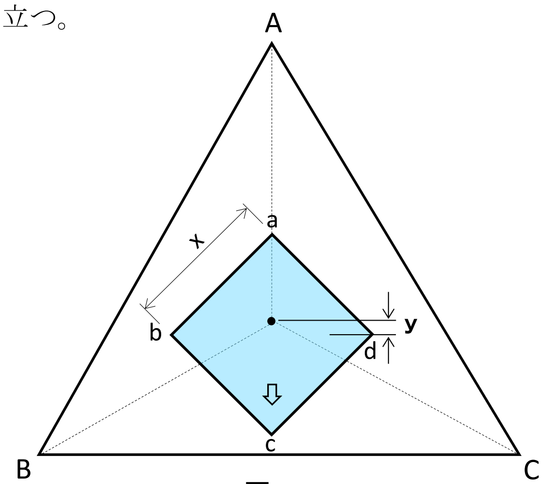


図９

点ｄの座標 $\left(\frac{x}{\sqrt{2}},\ -\mathrm{y},\ x\right)$ から、点ｄと面ＤＡＣの距離は、

$\dfrac{\left|3\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{3}(-\mathrm{y})+\sqrt{\frac{3}{2}}x-1\right|}{\sqrt{\left(3^2+\sqrt{3}^2+\sqrt{\frac{3}{2}}^2\right)}}$ と表され、

点ｄが面ＤＡＣと接する条件から次式が成り立つ。

$$3\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{3}(-\mathrm{y})+\sqrt{\frac{3}{2}}x-1=0 \quad \text{---------------⑬}$$

⑫⑬を解いて、$x=\dfrac{3\sqrt{2}}{6+5\sqrt{3}}=0.2894$, $\mathrm{y}=\dfrac{9}{13}-\dfrac{16}{13\sqrt{3}}=-0.0183$

ｙがマイナスなので、上方向に動かすことを示している。

　次に、立方体の一辺が底面に接した状態で傾斜させた場合を考える。

傾斜角度をθとし（３）と同じように、$0<\theta\leq 19.47^\circ$ 及び、

$19.47^\circ<\theta\leq 54.74^\circ$ の範囲で点ｄと正四面体との距離を調べる。

$0<\theta\leq 19.47^\circ$ における点ｄと面ＤＡＣの距離について、

点ｄの座標は、

$$\left[\frac{x}{\sqrt{2}},\ x\left\{\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{3}{2\sqrt{2}}\cos\theta\right\}-\frac{1}{2\sqrt{3}},\ x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\cos\theta\right)\right]$$

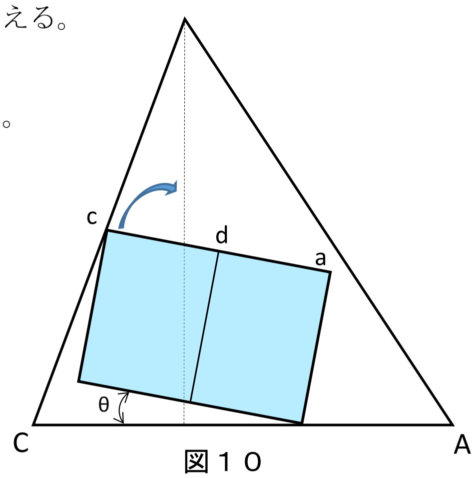


図１０

と表せるので、面ＤＡＣの式 $3X+\sqrt{3}\mathrm{Y}+\sqrt{\frac{3}{2}}Z=1$ より、

点ｄと面ＤＡＣの距離 $=\dfrac{\left|3\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{3}\left[x\left\{\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\cos\theta\right\}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right]+\sqrt{\dfrac{3}{2}}x(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\cos\theta)-1\right|}{\sqrt{\left(3^2+\sqrt{3}^2+\sqrt{\dfrac{3}{2}}^2\right)}}$ ------⑭

⑭は $0<\theta\leq 19.47°$ の間で θ に関して単純増加関数であり、$\theta=19.47°$ のとき最大となる。

このとき $\tan\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(19.47°)$，$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ より、

$$3\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{3}\left[x\left(\frac{1}{2}\frac{1}{3}+\frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right]+\sqrt{\frac{3}{2}}x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-1=0$$

これを解いて $x=\dfrac{3}{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}}=0.2686$

$19.47°<\theta\leq 54.74°$ における点ｄと面ＤＡＣの距離

点ｄの座標は、$\left[\dfrac{x}{\sqrt{2}},\ x\left\{\dfrac{3}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right\}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\cos\theta\right)\right]$ と表せるので、

点ｄと面ＤＡＣの距離 $=\dfrac{\left|3\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{3}\left[x\left\{\dfrac{3}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right\}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right]+\sqrt{\dfrac{3}{2}}x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\cos\theta\right)-1\right|}{\sqrt{\left(3^2+\sqrt{3}^2+\sqrt{\dfrac{3}{2}}^2\right)}}$ ------⑮

⑮の θ に関する部分のみ取り出して、微分して０とおくと
$\sqrt{6}\sin\theta=2\sqrt{3}\cos\theta$ より、$\tan\theta=\sqrt{2}\,(54.74°)$ これは、ちょうど立方体の面ａｂｃｄが、正四面体の一辺ＤＡに平行になる時に一致する。

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を⑮分子に入れて、

$$3\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{3}\left[x\left\{\frac{3}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right]+\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x-1=0$$

これを解いて $x=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}=0.2357$

最後に傾き $\theta=54.74°$ のとき図１０の点ｃについて面ＤＡＣとの距離はどうなるのか？
点ｃの座標は

$\left[\dfrac{x}{\sqrt{2}},\ \left(\dfrac{3}{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta\right)x-\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ x\cos\theta\right]=\left[\dfrac{x}{\sqrt{2}},\ \left(\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{2}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)x-\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}x\right]$ と表せる。

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を入れて、

$3\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{3}\left[\left(\frac{3}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right]+\sqrt{\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}}x-1=0$ を解いて、$x=\frac{1}{3\sqrt{2}}=0.2357$

よって、点ｃ，ｄは立方体の一辺の長さが 0.2357 のとき、面ＤＡＣに同時に接している。

ここまでの結果を整理して表にまとめると以下のとおりである。

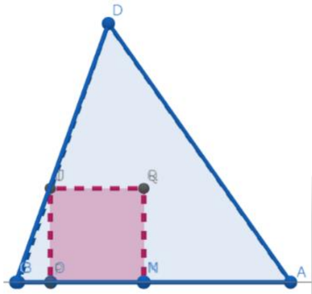
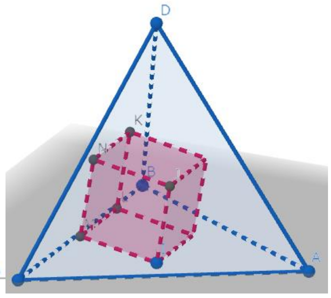
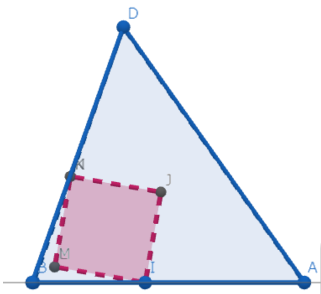
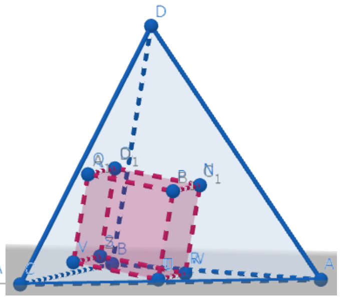
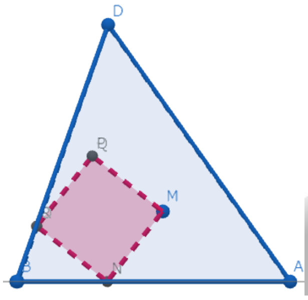
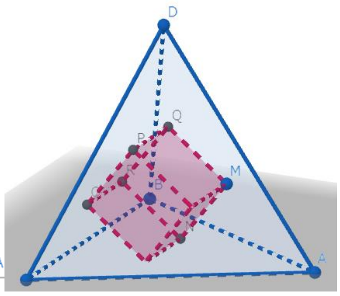
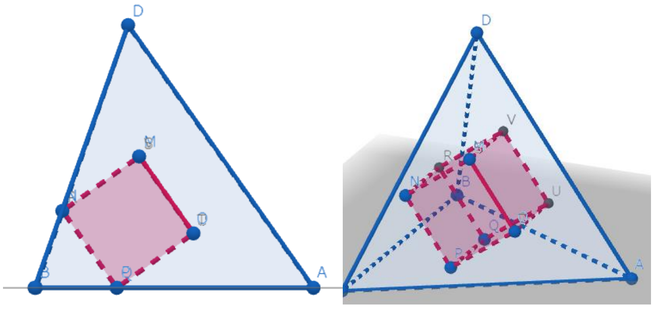
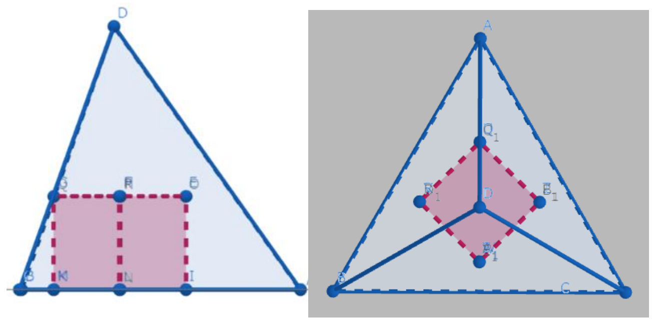
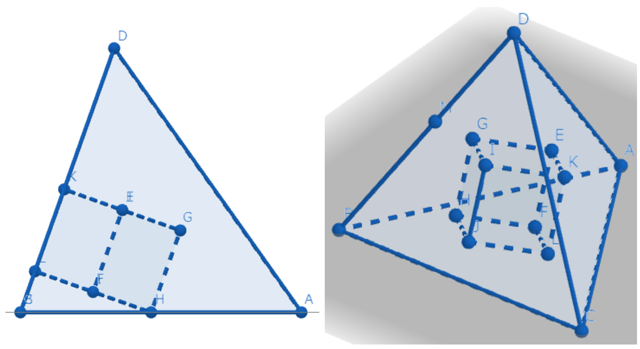
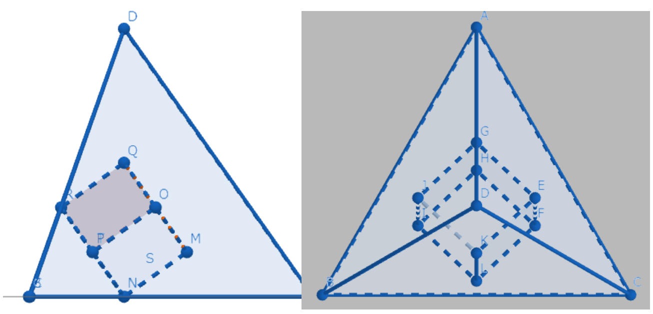
図	立方体の中心座標	１辺の長さ 内接正方形の体積比
 	X： 0 Y： $-\frac{\sqrt{3}-1}{6+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}$ (-0.0361) Z： $\frac{3}{6+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}$ (0.1480)	$\frac{6}{6+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}$ (0.2959) 体積比 21.98 %
 	X： 0 Y： $-\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{12}$ (-0.0248) Z： $\frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ (0.1480)	$\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ (0.2929) 傾き $tan^{-1}\left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)$ (9.74°　) 体積比 21.32 %
 	X： 0 Y： $-\frac{\sqrt{5-2\sqrt{2}}-1}{\sqrt{3}\left(6+\sqrt{2}+2\sqrt{5-2\sqrt{2}}\right)}$ (-0.0264) Z： $\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\left(6+\sqrt{2}+2\sqrt{5-2\sqrt{2}}\right)}$ (0.1998)	$\frac{2\sqrt{5-2\sqrt{2}}}{6+\sqrt{2}+2\sqrt{5-2\sqrt{2}}}$ (0.2844) 傾き $tan^{-1}\left(\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)$ (38.41°　) 体積比 19.52 %

図	立方体の中心座標	１辺の長さ
	X： 0 Y： $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (0.2887) Z： $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ (0.2041)	$\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ (0.2929) 傾き $tan^{-1}(\sqrt{2})$ (54.74°) 体積比 21.32 %
	X： 0 Y： $\frac{9}{13}-\frac{16}{13\sqrt{3}}$ (-0.0183) Z： $\frac{3\sqrt{2}}{2(6+5\sqrt{3})}$ (0.1447)	$\frac{3\sqrt{2}}{6+5\sqrt{3}}$ (0.2894) 体積比 20.57 %
	X： 0 Y： $1-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (0.7113) Z： $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (0.7071)	$\frac{3}{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}}$ (0.2686) 傾き $tan^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ (19.47°) 体積比 16.44 %
	X： 0 Y： $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (0.5176) Z： $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (0.8660)	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (0.2357) 傾き $tan^{-1}(\sqrt{2})$ (54.74°) 体積比 11.11 %

一辺の長さ１の正四面体の内部で可能な、最大立方体の一辺の大きさは 図４に示すように、

$\dfrac{6}{6+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}$ $(= 0.2959)$　という結論となった。

一辺１の正四面体の体積は $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ であるから、内接最大立方体との体積比は $0.2959^3 \div \dfrac{\sqrt{2}}{12} = 0.2198$

正四面体に内接する球の体積は、内接球の半径 $r = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$ から $\dfrac{4\pi}{3}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{12}\right)^3 = 0.0356$ なので、

内接立方体との体積比は $0.2959^3 \div 0.0356 = 0.7272$ となり、内接球の方が体積が大きい。

私としては、図７，図８や図１０のように傾けた時に最大になることを期待していたが、結果は比較的平凡なものだった。正四面体内に立方体を内接させた時、一辺が最大となりそうな配置として考え得るケースを網羅したので、解答としては正しと思うが証明としてはまだ不十分である。

（２０２２．０３．２５）