１２７「日本数学オリンピック問題を解いてみた（１）」

「国際数学オリンピック大会」は１９５９年東欧諸国を中心に始まり、日本は１９９０年 第３１回大会から参加している。数学的才能に恵まれた世界の若者が集いその能力を競う。

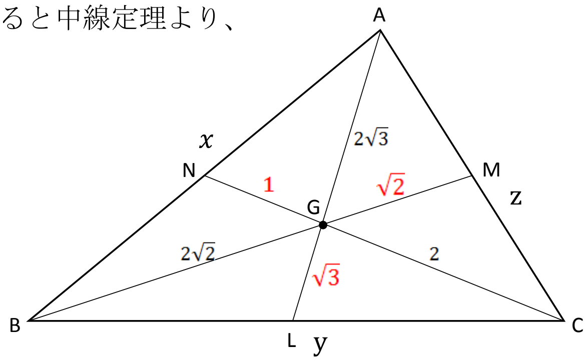
日本では代表を選考するための国内大会（日本数学オリンピック大会）があり、それに予選と本選がある。最近、日本数学オリンピックの過去問に挑戦している。といっても、自分の興味ある問題だけを選んで解いていて、比較的幾何学の問題が多い。ここでは、その中からいくつか紹介したい。

問題は「数学オリンピック財団」のホームページに掲載されている。しかし、問題のみで解答がないので、模範的な解答になっているかどうかわからない。解答は書籍で出版されているので、見たければ本を買わなくてはならない。ネット上に解答をアップしている人もいるが、ごく一部の問題だけである。

１９９１年 第１回 日本数学オリンピック予選（第３問）

3. ３角形 ABC の重心を G とする．$GA=2\sqrt{3}$, $GB=2\sqrt{2}$, $GC=2$ のとき３角形 ABC の面積を求めよ．

辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢの中点をＬ，Ｍ，Ｎとすると、ＡＬ，ＢＭ，ＣＮの交点Ｇが⊿ＡＢＣの重心である。重心Ｇは、ＡＬ，ＢＭ，ＣＮを２：１に分割する点なので、ＧＬ$=\sqrt{3}$，ＧＭ$=\sqrt{2}$，ＧＮ$=1$である。辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡの長さをそれぞれx，y，zとすると中線定理より、



$$x^2+y^2=2\left[\left(3\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2\right] \quad \text{------------------------①}$$

$$y^2+z^2=2\left[3^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right] \quad \text{------------------------②}$$

$$z^2+x^2=2\left[\left(3\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right] \quad \text{------------------------③}$$

①＋②＋③を作ると、 $2x^2+2y^2+2z^2=2\left[\left(3\sqrt{2}\right)^2+3^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2+\dfrac{x^2+y^2+z^2}{4}\right]$ から、

$\dfrac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)=108$ となり、$x^2+y^2+z^2=72$ -------------④ が導かれる。

④−①，④−②，④−③をつくると、

④−① $z^2=72-\left(36+\dfrac{z^2}{2}\right)$ より $\dfrac{3}{2}z^2=36$、$z=2\sqrt{6}$

④−② $x^2=72-\left(18+\dfrac{x^2}{2}\right)$ より $\dfrac{3}{2}x^2=54$、$x=6$

④−③ $y^2=72-\left(54+\dfrac{y^2}{2}\right)$ より $\dfrac{3}{2}y^2=18$、$y=2\sqrt{3}$

３辺が求められたのでヘロンの公式より、求める⊿ＡＢＣの面積をＳとすると、

$\frac{1}{2}(x+y+z)=\frac{1}{2}(6+2\sqrt{3}+2\sqrt{6})=3+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ より、

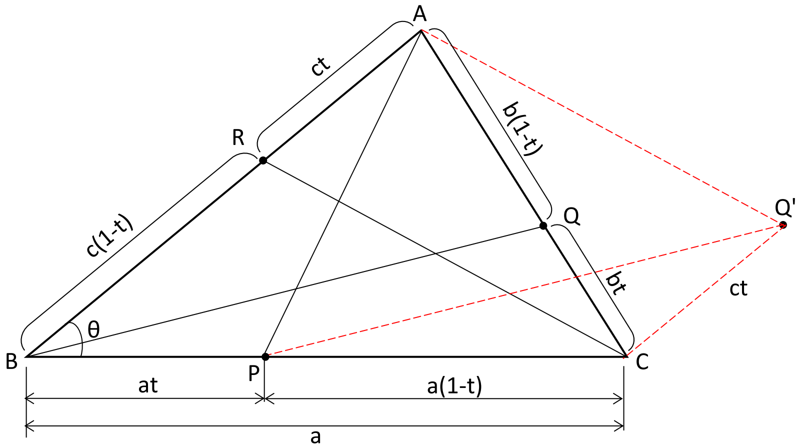
$$S=\sqrt{(3+\sqrt{3}+\sqrt{6})(3-\sqrt{3}+\sqrt{6})(3+\sqrt{3}-\sqrt{6})(-3+\sqrt{3}+\sqrt{6})}=6\sqrt{2}$$

⊿ＡＢＣの面積は$\underline{6\sqrt{2}}$である。

１９９１年 第１回 日本数学オリンピック本選（第１問）

1. ３角形 ABC の辺 BC, CA, AB をそれぞれ $t:(1-t)$ に内分する点を P, Q, R とする. 線分 AP, BQ, CR の長さを３辺にもつ３角形の面積を K, ３角形 ABC の面積を L とする. $\dfrac{K}{L}$ を求めよ (t を用いて表わせ).

点ＰからＢＱと同じ長さでＢＱと平行な線ＰＱ’，点Ｑ’からＣＲと同じ長さでＣＲと平行な線Ｑ’Ａを引く。ＡＰ，ＢＱ，ＣＲを３辺に持つ三角形はＢＱ，ＣＲを平行移動してできた三角形ＡＰＱ’となる。辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢの長さをそれぞれ a, b, c 、ＢＰ，ＣＱ，ＡＲの長さをそれぞれ at, bt, ct とすると、ＰＣ，ＱＡ，ＲＢの長さはそれぞれ$a(1-t)$, $b(1-t)$, $c(1-t)$ である。



∠ＡＢＣ＝θ とすると、Ｋ＝台形ＡＢＣＱ’－⊿ＡＢＰ－⊿ＰＣＱ’である。

台形ＡＢＣＱ’の面積$=\frac{1}{2}(c+ct)\cdot a\sin\theta$ 、⊿ＡＢＰの面積$=L\cdot t$、

⊿ＰＣＱ’の面積$=\frac{1}{2}a(1-t)\cdot ct\sin\theta$ と表せるので、

$\mathrm{K}=\frac{1}{2}(c+ct)\cdot a\sin\theta-L\cdot t-\frac{1}{2}a(1-t)\cdot ct\sin\theta=\frac{1}{2}ac\sin\theta\,[(1+t)-t(1-t)]-Lt$ となる。

従って、$\dfrac{K}{L}=\dfrac{\frac{1}{2}ac\sin\theta\,[(1+t)-t(1-t)]-Lt}{L}=\dfrac{\frac{1}{2}ac\sin\theta}{L}[(1+t)-t(1-t)]-t$

$\dfrac{1}{2}ac\sin\theta$ は三角形ＡＢＣの面積だからＬに等しい。以上より、

$\dfrac{K}{L}=(1+t)-t(1-t)-t=\underline{\underline{t^2-t+1}}$ となる。

（解の確認）

三角形ＡＢＣにおいて、三辺を$a=10$，$b=7$，$c=9$ とし、$t=0.4$ の場合について数値計算を行う。
∠ＣＡＢ，∠ＡＢＣ，∠ＢＣＡを計算すると、それぞれ 76.2° ，42.8° ，60.9° となる。
余弦定理を用いてＡＰ，ＢＱ，ＣＲを求めると、それぞれ 6.65，8.98，7.07 である。

以上をもとにＬ，Ｋを計算すると、Ｌ = 30.59，Ｋ = 23.25 となるので、

$\dfrac{K}{L}=\dfrac{23.25}{30.59}=0.76$，　$\dfrac{K}{L}=t^2-t+1=0.4^2-0.4+1=0.76$　となり 一致することが確認された。

１９９２年 第２回 日本数学オリンピック予選（第３問）

3. 座標平面上で方程式 $y^2=x^3+2691x-8019$ の定める曲線を E とする．この曲線上の 2 点 $(3,9)$, $(4,53)$ を結ぶ直線は，もうひとつの点で曲線 E と交わる．この点の x 座標を求めよ．

点$(3,9)$，$(4,53)$を通る直線の方程式は、$y-9=\dfrac{53-9}{4-3}(x-3)$ より、$y=44x-123$ と表せる。

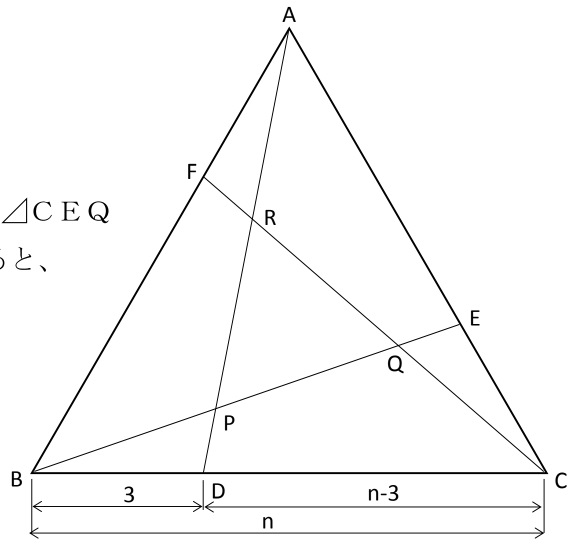
これを $y^2=x^3+2691x-8019$ に代入して、$(44x-123)^2=x^3+2691x-8019$ これを整理して、
$x^3-44^2x^2+(2691+2\cdot44\cdot123)x-(8019+123^2)=0$　　------------------------①
この方程式の解は３つあり、その２つは $x=3$，$x=4$ なので①は $(x-3)(x-4)(x-c)=0$ と書ける。
$(x-3)(x-4)=x^2-7x-12$ で①を割ることによって $(x-c)$ を求める。

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad x-(7-44^2) \\
x^2-7x-12\,\big)\,x^3-44^2x^2+(2691+2\cdot44\cdot123)x-(8019+123^2) \\
\qquad\qquad -\big)\,\underline{x^3-7x^2-12x} \\
\qquad\qquad\quad (7-44^2)x^2+(2691+2\cdot44\cdot123-12)x \\
\qquad\qquad -\big)\,\underline{(7-44^2)x^2+7(7-44^2)x-12\,(7-44^2)} \\
\qquad\qquad\qquad -\big)\,\underline{[(2691+2\cdot44\cdot123-12)-7(7-44^2)]x+12\,(7-44^2)-(8019+123^2)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (13503-13503)x+(23148-23148)=0
\end{array}
$$

$17-44^2=1929$ なので①は、$(x-3)(x-4)(x-1929)=0$ である。
直線 $y=44x-123$ が曲線Ｅと交わる点の x 座標は$\underline{\underline{x=1929}}$ である。

１９９２年 第２回 日本数学オリンピック予選（第６問）

6. 正三角形 ABC において, 辺 BC, CA, AB を $3:(n-3)$ に内分する点をそれぞれ D, E, F とする (ただし, $n>6$). 線分 AD, BE, CF の交点のつくる三角形の面積が, もとの正三角形の面積の $\frac{4}{49}$ のとき, n を求めよ.



内部にできた三角形を⊿ＰＱＲとする。

⊿ＡＢＣの面積を S_1，⊿ＰＱＲの面積を S_2とすると、

題意より、$\frac{S_2}{S_1}=\frac{4}{49}$ である。

⊿ＡＢＤ，⊿ＢＣＥ，⊿ＣＡＦ及び⊿ＡＦＲ，⊿ＢＤＰ，⊿ＣＥＱはそれぞれ合同なので面積は等しく、それを T_1，T_2 とすると、

$S_2 = S_1 - 3T_1 + 3T_2$ ------------------------① と表せる。

⊿ＡＢＤと⊿ＡＦＲは２つの対応する角度が等しいので相似である。⊿ＡＢＤに余弦定理を適用すると、

$$\mathrm{AD} = \sqrt{n^2+3^2-2\cdot3\cdot n\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{n^2-3n+9}$$

であるから相似比は、$\frac{3}{\sqrt{n^2-3n+9}}$ である。

$$S_1=\frac{n}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}n}{2}=\frac{\sqrt{3}n^2}{4}\ ,\quad T_1=\frac{\sqrt{3}n^2}{4}\cdot\frac{3}{n}=\frac{3\sqrt{3}n}{4}\ ,\quad T_2 = T_1\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{n^2-3n+9}}\right)^2$$

$$=\frac{3\sqrt{3}n}{4}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{n^2-3n+9}}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}n}{4}\cdot\frac{9}{n^2-3n+9}$$ 以上を①に入れると、

$$S_2 = S_1-3T_1+3T_2=\frac{\sqrt{3}n^2}{4}-3\cdot\frac{3\sqrt{3}n}{4}+3\cdot\frac{3\sqrt{3}n}{4}\cdot\frac{9}{n^2-3n+9}$$ 、これが $\frac{4}{49}S_1$ に等しい。

よって、$$\frac{\sqrt{3}n^2}{4}-3\cdot\frac{3\sqrt{3}n}{4}+3\cdot\frac{3\sqrt{3}n}{4}\cdot\frac{9}{n^2-3n+9}=\frac{4}{49}\cdot\frac{\sqrt{3}n^2}{4}$$

両辺を $\frac{\sqrt{3}n^2}{4}$ で割って、$1-\frac{9}{n}\left(1-\frac{9}{n^2-3n+9}\right)=\frac{4}{49}$ これを整理して、$\frac{n-3}{n^2-3n+9}=\frac{5}{49}$ より、

$5n^2-64n+3\cdot64=0$ これを解いて $(5n-24)(n-8)=0$ から $n=4.8$，8 を得る。

$n>6$ であるから求める答えは、$\underline{n=8}$ である。

１９９２年 第２回 日本数学オリンピック予選（第７問）

7. x, y **は正整数で,** x^4+y^4 **を** $x+y$ **で割った商は** 97 **である. 余りを求めよ.**

$x^4+y^4=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)+2y^4$ と分解できる。

両辺を $x+y$ で割って、$\dfrac{x^4+y^4}{x+y}=(x^2+y^2)(x-y)+\dfrac{2y^4}{x+y}$

$(x^2+y^2)(x-y)=97$ より、97 は素数であるから、$x-y=1$ でなければならない。

$x^2+y^2\leq 97$ から、x，y の組み合わせは次の４通り考えれば充分である。

$(x=7,\ y=6)$，$(x=6,\ y=5)$，$(x=5,\ y=4)$，$(x=4,\ y=3)$

余り $\dfrac{2y^4}{x+y}$ は 97 より小さくなくてはならないので、$\dfrac{2y^4}{x+y}<97$ である。これを満たす x，y は、

$(x=7,\ y=6)$ のとき、$\dfrac{2\cdot 6^4}{7+6}=199$ 余り $5\rightarrow$ 不適　$\dfrac{7^4+6^4}{7+6}=\dfrac{3697}{13}=284$ 余り 5

$(x=6,\ y=5)$ のとき、$\dfrac{2\cdot 5^4}{6+5}=113$ 余り $7\rightarrow$ 不適　$\dfrac{6^4+5^4}{6+5}=\dfrac{1921}{11}=174$ 余り 7

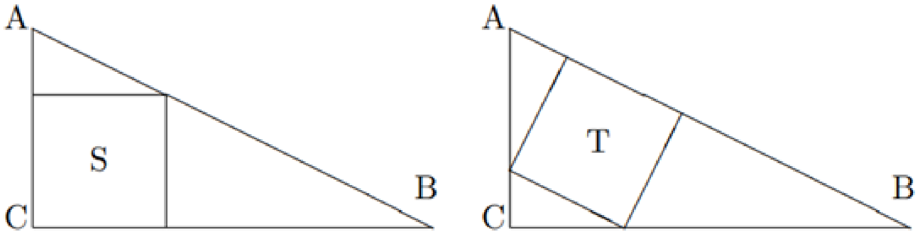
$(x=5,\ y=4)$ のとき、$\dfrac{2\cdot 4^4}{5+4}=56$ 余り $8\rightarrow$ 適　$\dfrac{5^4+4^4}{5+4}=\dfrac{881}{9}=97$ 余り 8

$(x=4,\ y=3)$ のとき、$\dfrac{2\cdot 3^4}{4+3}=23$ 余り $1\rightarrow$ 不適　$\dfrac{4^4+3^4}{4+3}=\dfrac{337}{7}=48$ 余り 1

以上より、$x=5$，$y=4$ のとき商が９７，余り８となる。

１９９２年 第２回 日本数学オリンピック予選（第１１問）

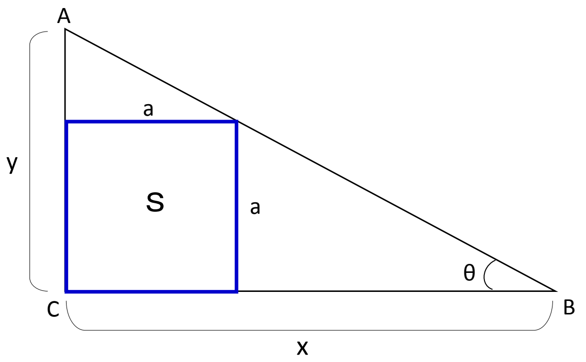
11. 直角三角形 ABC **に下図のように正方形** S **と** T **を入れたとき,** S **の面積は** 441, T **の面積は** 440 **であった. このとき,** $AC+CB$ **を求めよ.**

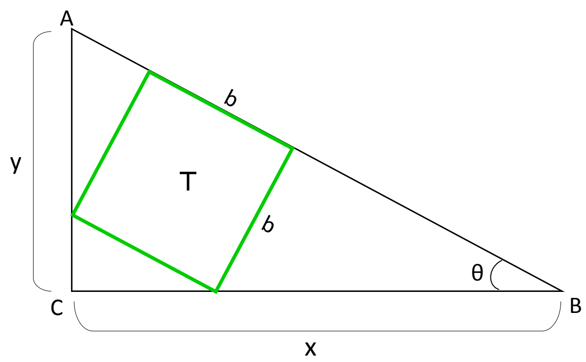


　正方形Ｓ，Ｔの一辺を、次の図のようにそれぞれ a，b とする。

ＢＣ$=x$，ＡＣ$=y$ とおくと、$a^2=441$，$b^2=440$ のとき $x+y$ を求める問題である。

∠ＡＢＣ$=\theta$ とすると、





$tan\,\theta = \dfrac{y}{x}$ ， $sin\,\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$， $cos\,\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$(x-a)tan\,\theta = a$ だから、$(x-a)\dfrac{y}{x} = a$ より、$xy = a(x+y)$ ------------------------①

$(x - b\cos\theta)sin\,\theta = b$ だから、$\left(x - b\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = b$ より、

$xy\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{b}{x^2+y^2}\right) = b$ ------------------------②

$x+y=X$，$xy=Y$ とおくと、① は $Y = aX$ ------------------------③

② は $Y\left(\dfrac{1}{\sqrt{X^2-2Y}} - \dfrac{b}{X^2-2Y}\right) = b$ ------------------------④ と表せる。

③を④に代入すると、$aX\left(\dfrac{1}{\sqrt{X^2-2aX}} - \dfrac{b}{X^2-2aX}\right) = b$

整理して、$\dfrac{aX}{\sqrt{X^2-2aX}} = b\dfrac{X-a}{X-2a}$、両辺を二乗して $\dfrac{a^2X^2}{X^2-2aX} = b^2\dfrac{(X-a)^2}{(X-2a)^2}$ さらに整理すると

$(a^2-b^2)X^2 - 2a(a^2-b^2)X - a^2b^2 = 0$ これを解いて、

$X = \dfrac{a(a^2-b^2) \pm a^2\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2}$， $a^2-b^2 \neq 0$ で割ると、$X = a \pm \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$

$a^2 = 441$ より、$a = 21$ だから

ＡＣ＋ＣＢ $= x+y = \mathrm{X} = 21 \pm \dfrac{441}{\sqrt{441-440}}$ 、$X > 0$ であるから ＡＣ＋ＣＢ $= 21 + 441 = \underline{\underline{462}}$

（解の確認）

$Y = aX = 21 \cdot 462 = 9702$

$x+y = 462$，$xy = 9702$ より、$x^2 - 462x + 9702 = 0$ これを解いて、$x > y$ とすれば

$x = 21(11+3\sqrt{11})$，$y = 21(11-3\sqrt{11})$ これから、$tan\,\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{21(11-3\sqrt{11})}{21(11+3\sqrt{11})} = 10 - 3\sqrt{11}$

① $(x-a)tan\,\theta = a$ が成り立つかどうか確認

$[21(11+3\sqrt{11}) - 21](10-3\sqrt{11}) = 21(10+3\sqrt{11})(10-3\sqrt{11}) = 21(100-99) = 21 = a$ ＯＫ

$(x-b\cos\theta)sin\,\theta=b$ が成り立つかどうか確認

$$cos\,\theta=\frac{1}{\sqrt{1+tan^2\,\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(10-3\sqrt{11}\right)^2}}=\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20}$$

$$sin\,\theta=\frac{1}{\sqrt{1+cot^2\,\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(10+3\sqrt{11}\right)^2}}=\frac{-3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20}$$ 、$b=\sqrt{440}=2\sqrt{110}$ だから、

$$(x-b\cos\theta)\,sin\,\theta=\left[21\left(11+3\sqrt{11}\right)-2\sqrt{110}\cdot\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20}\right]\cdot\frac{-3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20}$$

$$=\left[21\left(11+3\sqrt{11}\right)-\left(11+3\sqrt{11}\right)\right]\cdot\frac{-3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20}=20\left(11+3\sqrt{11}\right)\cdot\frac{-3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20}=2\sqrt{110}$$ ＯＫ

以上より、ＡＣ＋ＣＢ $=462$ の正しいことが確認された。

実際の三角形は、

$x=21\left(11+3\sqrt{11}\right)=439.95$，$\mathrm{y}=21\left(11-3\sqrt{11}\right)=22.05$　$tan\,\theta=10-3\sqrt{11}=0.0501$ ($\theta=2.87^\circ$)

となり、$x=439.95$，$\mathrm{y}=22.05$，　$\theta=2.87^\circ$ の非常に細長い扁平な直角三角形である。

１９９２年 第２回 日本数学オリンピック本選（第１問）

1. x と y は互いに素な正整数で，$xy\neq 1$ とし，n は正の偶数とする．このとき，$x+y$ は x^n+y^n の約数でないことを証明せよ．

---

x^n+y^n を $x+y$ で割り、展開すると、

$$x^n+y^n=(x+y)\left[x^{n-1}y^0+(-1)^1x^{n-2}y^1+(-1)^2x^{n-3}y^2+(-1)^3x^{n-4}y^3+\cdots\cdots+(-1)^{n-2}x^1y^{n-2}+(-1)^{n-1}x^0y^{n-1}\right]$$

最終項 $(-1)^{n-1}x^0y^{n-1}$ において、n は題意より正の偶数であるから、$(-1)^{n-1}=-1$ となり、最終項は $-y^{n-1}$ となる。従って、必ず $2y^{n-1}$ が残るため n が偶数のときは割り切れない。

以上より、n が正の偶数のとき $x+y$ はx^n+y^n の約数ではない。

数学オリンピックは、主に数学の得意な高校生などがチャレンジすることが多く、公式や定理，解答への定石などを含めかなりトレーニングを必要とすると思う。実際にやってみると、解にたどり着くまでにかなり時間がかかる。解くことはできても、解への最短距離を辿っているかどうか自信がない。

中にはかなりハードな問題があり、それらを時間内に解くのは大変だろう。私にとっては、時間にとらわれる必要がないので、楽しみながら解くことができるのがいい。（２０２２．０４．０７）