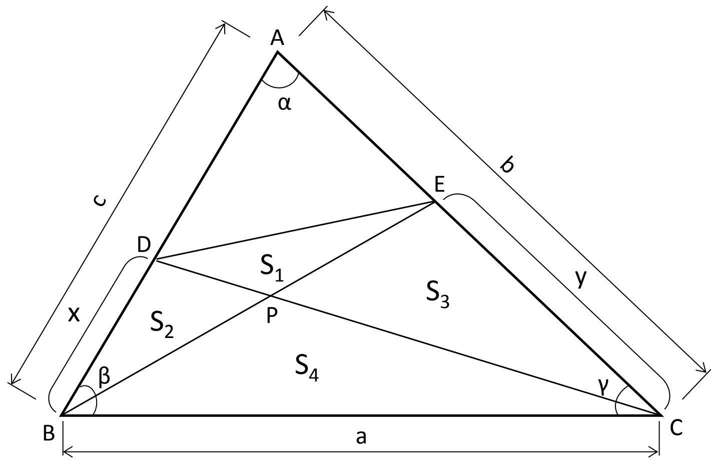
１２８「日本数学オリンピック問題を解いてみた（２）」

> １９９２年 第２回 日本数学オリンピック本選（第２問）
>
> **2. 面積 1 の $\triangle ABC$ の辺 AB, AC 上の点をそれぞれ D, E とし，線分 BE, CD の交点を P とする．四角形 $BCED$ の面積が $\triangle PBC$ の面積の 2 倍に等しいという条件を満たしながら点 D, E が辺 AB, AC 上を動くとき，$\triangle PDE$ の面積の最大値を求めよ．**

ＢＣ＝a，ＣＡ＝ｂ，ＡＢ＝ｃ，∠ＢＡＣ＝α，∠ＡＢＣ＝β，∠ＢＣＡ＝γ，

ＢＤ＝ｘ，ＣＥ＝ｙ，◿ＰＤＥ，◿ＰＢＤ，◿ＰＣＥ，◿ＰＢＣの面積をそれぞれS_1，S_2，S_3，S_4とする。



題意より、台形ＢＣＥＤの面積＝２S_4から、

$S_1+S_2+S_3+S_4=2S_4$ --------------①

$S_2+S_4=\frac{1}{2}ax\sin\beta$ --------------------②

$S_3+S_4=\frac{1}{2}ay\sin\gamma$ --------------------③

$S_1+S_2+S_3+S_4=$
◿ＡＢＣの面積－◿ＡＤＥの面積から、

$S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{1}{2}ac\sin\beta-\frac{1}{2}(b-y)(c-x)\sin\alpha$ --------------------④

① ～ ④から、$0<x<c$，$0<y<b$ の条件で S_1 の最大値を求めればよい。

① より$S_1=S_4-(S_2+S_3)$ --------------------⑤

②より $S_2=\frac{1}{2}ax\sin\beta-S_4$，③より $S_3=\frac{1}{2}ay\sin\gamma-S_4$ これを⑤に入れて、

$S_1=S_4-\left(\frac{1}{2}ax\sin\beta-S_4+\frac{1}{2}ay\sin\gamma-S_4\right)=3S_4-\frac{1}{2}ax\sin\beta-\frac{1}{2}ay\sin\gamma$ --------------------⑥

①，④から、$2S_4=\frac{1}{2}ac\sin\beta-\frac{1}{2}(b-y)(c-x)\sin\alpha$ これを⑥に入れると、

$S_1=\frac{3}{4}ac\sin\beta-\frac{3}{4}(b-y)(c-x)\sin\alpha-\frac{1}{2}ax\sin\beta-\frac{1}{2}ay\sin\gamma$

$a\sin\beta=b\sin\alpha$，$a\sin\gamma=c\sin\alpha$ を用いて整理すると、

$S_1=\frac{3}{4}c(a\sin\beta-b\sin\alpha)+\frac{1}{4}bx\sin\alpha+\frac{1}{4}cy\sin\alpha-\frac{3}{4}xy\sin\alpha$

$a\sin\beta-b\sin\alpha=0$ だから、

$S_1 = \dfrac{1}{4}\sin\alpha\,(bx + cy - 3xy)$ ここで、$\dfrac{1}{4}\sin\alpha$ は定数だから、$0 < x < c,\ 0 < y < b$ の条件で

$f(x,\ y) = bx + cy - 3xy$ の最大値を求めればよい。$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおいて、

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = b - 3y = 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = c - 3x = 0$ より、$x = \dfrac{c}{3},\ y = \dfrac{b}{3}$ のとき最大値となり、その値は

$$f\left(\frac{c}{3},\ \frac{b}{3}\right) = b\cdot\frac{c}{3} + c\cdot\frac{b}{3} - 3\cdot\frac{c}{3}\cdot\frac{b}{3} = \frac{1}{3}bc$$

従ってS_1の最大値は、$\dfrac{1}{4}\sin\alpha\cdot\dfrac{1}{3}bc = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha\cdot\dfrac{1}{6}$

$\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$ は⊿ＡＢＣの面積であり題意より１だから、⊿ＰＤＥの最大値は$\underline{\underline{\dfrac{1}{6}}}$ である。

１９９３年 第３回 日本数学オリンピック予選（第５問） **5. 一辺の長さが 1 の正方形 $ABCD$ 内の任意の点を P, Q とするとき，$AP + BP + PQ + CQ + DQ$ の最小値を求めよ．**

図１において、Ｂを原点とするＸ－Ｙ座標を考え、
Ｐ，Ｑの座標をそれぞれ$P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$ とすると、
ＡＰ＋ＢＰ＋ＰＱ＋ＣＱ＋ＤＱ＝

$$\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} + \sqrt{{x_1}^2 + (1 - y_1)^2} + \sqrt{(1 - x_2)^2 + {y_2}^2} + \sqrt{(1 - x_2)^2 + (1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

と表されるが、この式により最小値を求めることは難しい。
また、∠ＰＡＢ，∠ＰＢＡ，∠ＱＣＤ，∠ＱＤＣをそれぞれ $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4$ とすると、
ＡＰ＋ＢＰ＋ＰＱ＋ＣＱ＋ＤＱ＝

$$\frac{\sin\ \theta_1 + \sin\ \theta_2}{\sin(\ \theta_1 +\ \theta_2)} + \frac{\sin\ \theta_3 + \sin\ \theta_4}{\sin(\ \theta_3 +\ \theta_4)} + \frac{\sin^2\theta_1\,(1 - 2\sin\ \theta_2\cos\theta_2)}{\sin^2(\ \theta_1 +\ \theta_2)} + \frac{\sin^2\theta_4\,(1 - 2\sin\ \theta_3\cos\theta_3)}{\sin^2(\ \theta_3 +\ \theta_4)}$$

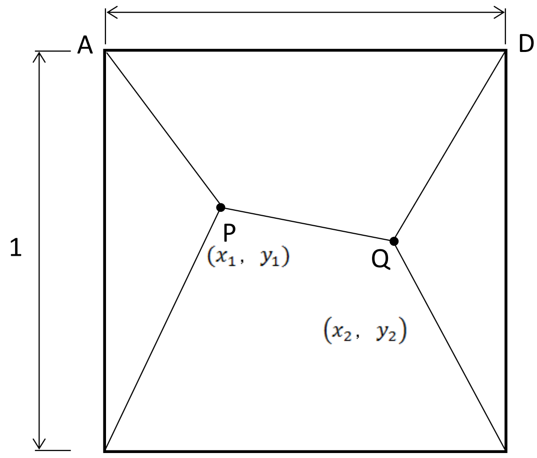


図１

と表されるが、同様にこの式から最小値を求めることは難しい。

そこで、２段階に分けて考える。

まず、図２のように点Ｐの Ｘ 座標x_1を a として、$0 < a < \dfrac{1}{2}$ の範囲の値として固定したとき、ＡＰ＋ＢＰが最小となる y_1 の値を求める 。

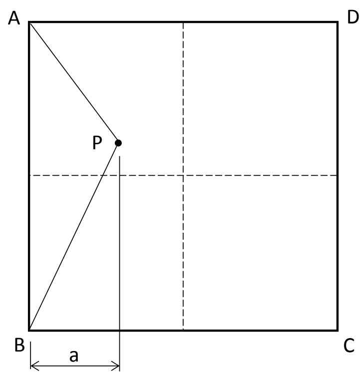


図２

$a > \dfrac{1}{2}$ の場合、最小値となるための条件としては不利なので、$0 < a < \dfrac{1}{2}$ の範囲で考えればよい。

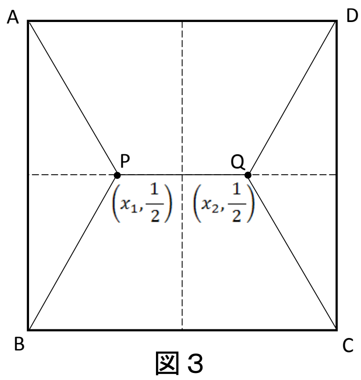


図３

ＡＰ＋ＢＰは $f(y_1) = \sqrt{a^2 + y_1^2} + \sqrt{a^2 + (1 - y_1)^2}$ と表され
この最小値は微分して０とおくと、

$f'(y_1) = \dfrac{y_1}{\sqrt{a^2 + y_1^2}} + \dfrac{1 - y_1}{\sqrt{a^2 + (1 - y_1)^2}} = 0$ より、

$\dfrac{y_1^2}{a^2 + y_1^2} = \dfrac{(1 - y_1)^2}{a^2 + (1 - y_1)^2}$ を解いて $y_1 = \dfrac{1}{2}$ を得る。

これは点Ｑに対しても同様なので、Ｐ，Ｑとも y の位置を $\dfrac{1}{2}$ に固定したとき、x_1，x_2 がどこにある場合が最小となるかを求めればよい。

図３において、$0 < x_1 \leq \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2} \leq x_2 < 1$ の条件で計算する。

$$\text{ＡＰ＋ＢＰ＋ＰＱ＋ＣＱ＋ＤＱ} = f(x_1,\ x_2) = 2\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + 2\sqrt{(1 - x_2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + (x_2 - x_1)$$

と表せるので、

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} - 1 = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2\frac{1 - x_2}{\sqrt{(1 - x_2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} + 1 = 0\text{、これを解いて}$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\ \text{より}\ x_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}},\quad \frac{1 - x_2}{\sqrt{(1 - x_2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = -\frac{1}{2}\ \text{より}\ x_2 = 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{ＡＰ＋ＢＰ＋ＰＱ＋ＣＱ＋ＤＱ} = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + 2\sqrt{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

$= \underline{\underline{1 + \sqrt{3}}}$ これが求める最小値である。

（補 足）

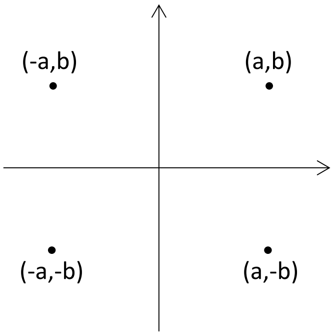


図４

この問題の答えは、直感的に図３のようになるだろうと解る。
３点の場合、最小となる点は「１１４」で述べた有名なフェルマー点問題である。この問題は図４のように、４点を最短の道路で結ぶにはどうすればよいかという問題となる。

図５のようにいくつかパターンが考えられるが、すぐに（４）のケースが最も短いだろうと予想できる。あとは２つの道路の交わる角度の問題である。

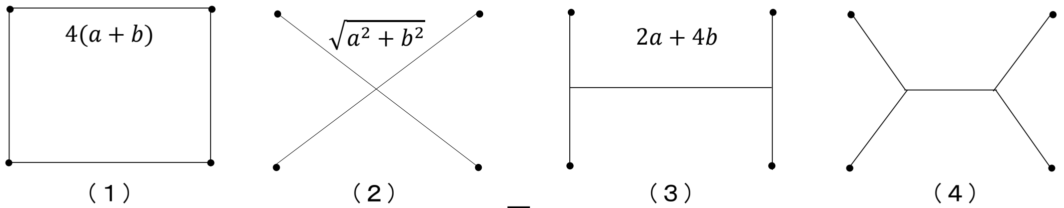


図５

図６に示すように、点Ｐの位置を原点Ｏから、$a-x$ とおいて道路の長さが最短となる x を求める。４点を結ぶ道路の全長は、$f(x)=2(a-x)+4\sqrt{x^2+b^2}$ と表せるので、

$f'(x)=-2+4\dfrac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}=0$ を解いて、$x=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$

以上より、点Ｐにおいて斜めの道路は６０°の角度で交わることが分かる。従って、道路の全長は $2(a+\sqrt{3}b)$ である。

このことを知っていれば、ＡＰ＋ＢＰ＋ＰＱ＋ＣＱ＋ＤＱの最小値を求める問題はすぐに解ける。

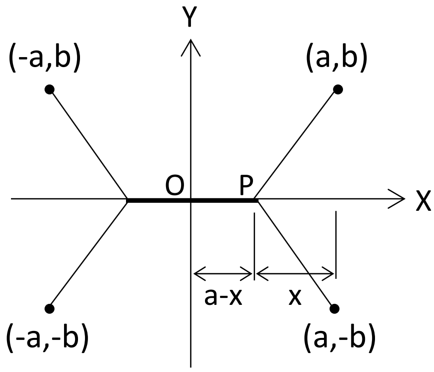
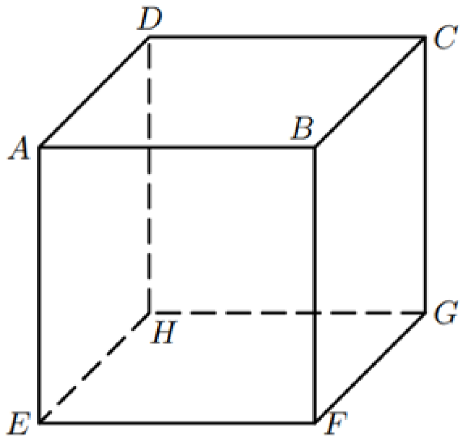


図６

１９９４年 第４回 日本数学オリンピック予選（第３問）

3. 図のような立方体 $ABCD$-$EFGH$ について面 AFH と面 BDE の交わる角度を θ $(0° \leqq \theta \leqq 90°)$ とするとき $\cos\theta$ を求めよ.



右図のように、ＡＣとＢＤの交点をＰ，ＥＧとＦＨの交点をＱとすると、面ＡＦＨと面ＢＤＥの交わる角度は直線ＥＰと直線ＡＱのなす角度に等しい。

立方体の一辺をａとすると、∠ＥＰＡ，∠ＡＱＥは次のように計算できる。

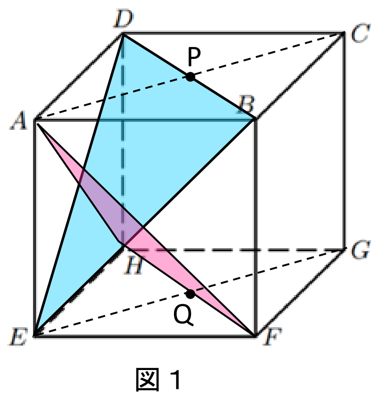


図１

$$\angle \mathrm{AQE} = tan^{-1}\left(\frac{AE}{EQ}\right) = tan^{-1}\left(\frac{a}{\frac{a}{\sqrt{2}}}\right) = tan^{-1}(\sqrt{2})$$

$$\angle \mathrm{EPA} = tan^{-1}\left(\frac{AE}{AP}\right) = tan^{-1}\left(\frac{a}{\frac{a}{\sqrt{2}}}\right) = tan^{-1}(\sqrt{2})$$

⊿ＥＰＡと⊿ＡＱＥは、平面ＡＣＧＥ上にあり図２の状態で交わっている。直線ＥＰと直線ＡＱのなす角度は、⊿ＥＰＡに対し⊿ＡＱＥを回転させ、点Ｑを点Ｐに一致させた時の図３に示す θ で与えられる。

ＥＰ＝ＡＱ＝ $\sqrt{a^2 + \frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a$ から、

$$\cos\theta = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a\right)^2 - (\sqrt{2}a)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a} = \frac{1}{3}$$ より、

$\underline{\underline{\cos\theta = \frac{1}{3}}}$ これが求める答えである。

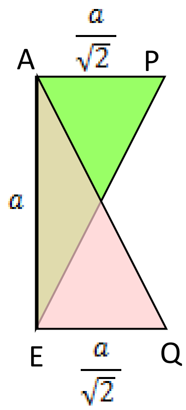


図２

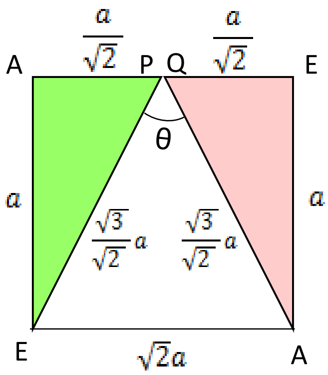


図３

１９９４年 第４回 日本数学オリンピック予選（第５問）

5. $\triangle ABC$ **の辺** AB, AC **上の点を** D, E**とし，**BE, CD **の交点を** P **とする．**
$\triangle ADE, \triangle BPD, \triangle CEP$**の面積がそれぞれ** 5, 8, 3 **のとき，**$\triangle ABC$**の面積を求めよ．**

⊿ＰＢＣ，⊿ＰＤＥの面積をそれぞれ S_1， S_2、ＰＢ $= x_1$， ＰＥ $= x_2$，
ＰＣ $= y_1$， ＰＤ $= y_2$ とすると、

$\frac{x_2}{x_1} = \frac{S_1}{8} = \frac{3}{S_2}$， $\frac{y_2}{y_1} = \frac{S_1}{3} = \frac{8}{S_2}$ が成り立つ。

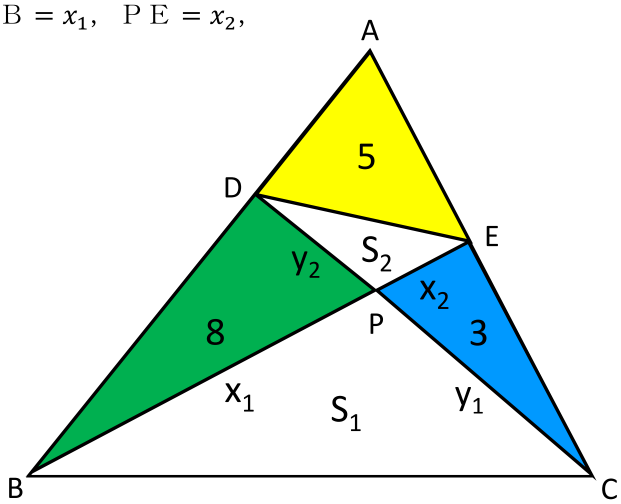
これから、 $S_1 S_2 = 24$ である。

$S_1 S_2 = 24$ という条件で $\frac{S_1}{3} = \frac{8}{S_2}$ が成り立つのは、

$A = 12$，$B = 2$ である。

以上より、⊿ＡＢＣの面積は $8 + 5 + 3 + S_1 + S_2$

$= 8 + 5 + 3 + 12 + 2 = \underline{\underline{30}}$ である。



１９９４年 第４回 日本数学オリンピック本選（第４問）

4. $\triangle ABC$ **の辺** BC **の中点を** M **とする．** $\angle MAC = 15^\circ$ **であるときの** $\angle B$ **の最大値を求めよ．**

∠ＡＢM，∠ＡＢ’M，∠ＡＢ’’Ｍと∠Ｂが変化する中で、その最大値を求めよというなかなか興味深い問題。

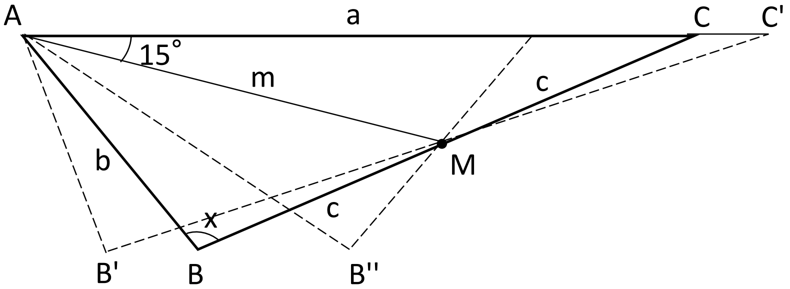


図１

図１において、ＡＣ＝a，ＡＢ＝b，ＢＭ＝ＣＭ＝c，ＡＭ＝m，∠ＡＢＭ＝xとおいて、

① $\cos x = \dfrac{b^2+c^2-m^2}{2bc}$ （余弦定理より）

② $\cos x = \dfrac{b^2+(2c)^2-a^2}{2b\cdot 2c}$ （余弦定理より）

③ $a^2+b^2 = 2(m^2+c^2)$ （中線定理より）

④ $\dfrac{1}{2}am\sin 15^\circ = \dfrac{1}{2}bc\sin x$ （⊿ＡＢＭの面積＝⊿ＡＣＭの面積）

という式を立て、①～④によりxの最大値を求められそうだがこの方法で解くことは難しい。

題意を単純化すると、図１の⊿ＡＢＭの部分を拡大して、図２のように水平線ＡＥに対して１５°傾いた線AMから、ＥＭ＝ＭＦとなるＡＥと平行な線ＧＦ上の点Ｂを自由に動かした時の∠ＡＢM最大値を求める問題と同と考えることができる。

点ＢがＧに一致した時、∠Ｂ＝７５°、点ＢがＦに一致した時、∠Ｂ＝７５°である。∠Ｂが最大となる点はＦＧ間のどこかに存在するので、その点をＢとし、ＢＧ＝x，ＢＦ＝yとする。AMは固定値として良いので、ＡＭ＝aとすると、

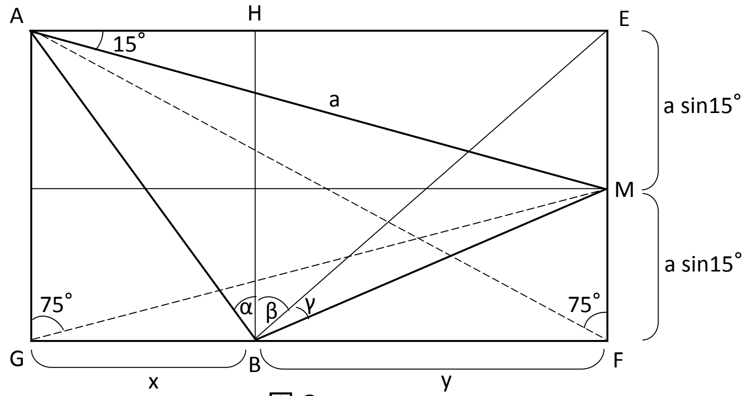


図２

ＡＥ＝$a\cos 15^\circ$ より$x+y=a\cos 15^\circ$，ＡＧ＝$2a\sin 15^\circ$，ＥＭ＝ＭＦ＝$a\sin 15^\circ$ である。
ＡＥ⊥ＢＨとなる点Ｈをとり、∠ＡＢＨ＝α，∠ＥＢＨ＝β，∠ＥＢＭ＝γとしたとき、

$\alpha+\beta+\gamma$ が最大となる点Bを求めればよい。

$\alpha=tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2a\,sin\,15^\circ}\right)$, $\beta=tan^{-1}\left(\dfrac{y}{2a\,sin\,15^\circ}\right)$, $\gamma=tan^{-1}\left(\dfrac{2a\,sin\,15^\circ}{y}\right)-tan^{-1}\left(\dfrac{a\,sin\,15^\circ}{y}\right)$

$a\,sin\,15^\circ$ 及び $a\,cos\,15^\circ$ は定数なので、$a\,sin\,15^\circ=p$, $a\,cos\,15^\circ=q$ とすると、

$y=a\,cos\,15^\circ-x$ から、$\alpha+\beta+\gamma$ は x の関数として表すことができ、

$$f(x)=\alpha+\beta+\gamma=tan^{-1}\left(\frac{x}{2p}\right)+tan^{-1}\left(\frac{q-x}{2p}\right)+tan^{-1}\left(\frac{2p}{q-x}\right)-tan^{-1}\left(\frac{p}{q-x}\right)$$

上式を x で微分して 0 と置くと、

$$f'(x)=\frac{2p}{4p^2+x^2}-\frac{2p}{4p^2+(q-x)^2}+\frac{2p}{4p^2+(q-x)^2}-\frac{p}{p^2+(q-x)^2}=\frac{p(x^2-4qx-2p^2+2q^2)}{(4p^2+x^2)[(q-x)^2+p^2]}=0$$

分母$\neq 0$, $p\neq 0$ だから、$x^2-4qx-2p^2+2q^2=0$ を解いて、

$x=2q\pm\sqrt{2(p^2+q^2)}$　p, q を戻すと、

$$x=2a\,cos\,15^\circ\pm\sqrt{2\left(p^2\,sin^2\,15^\circ+q^2\,cos^2\,15^\circ\right)}=2a\,cos\,15^\circ\pm\sqrt{2}\,a$$

$cos\,15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ だから、$x=\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}a$ または $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a$ 、図より明らかに $x<a$ だから、

$x=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a$ が解である。$y=a\,cos\,15^\circ-x=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}a-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a=\dfrac{-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{4}a$

以上より、

$$\alpha=tan^{-1}\left(\frac{x}{2a\,sin\,15^\circ}\right)=tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a}{2a\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\right)=tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}(45^\circ)$$

$$\beta=tan^{-1}\left(\frac{y}{2a\,sin\,15^\circ}\right)=tan^{-1}\left(\frac{\frac{-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{4}a}{2a\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\right)=tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\gamma=tan^{-1}\left(\frac{2a\,sin\,15^\circ}{y}\right)-tan^{-1}\left(\frac{a\,sin\,15^\circ}{y}\right)=tan^{-1}\left(\frac{2a\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{4}a}\right)-tan^{-1}\left(\frac{a\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{4}a}\right)$$

$=tan^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)-tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=tan^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)-\dfrac{\pi}{6}(30^\circ)$ であるから、

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}(45^\circ)+tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+tan^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)-\dfrac{\pi}{6}(30^\circ)$ ここで、

$tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+tan^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+cot^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}(90^\circ)$ なので、

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}(45^\circ)+\dfrac{\pi}{2}(90^\circ)-\dfrac{\pi}{6}(30^\circ)=\underline{\underline{105^\circ}}$ これが最大値である。

　求める角度を３つに分けて考えたが、βとγを分けなくとも解くことができる。
そのためにはβ＋γ→δとして、

$\beta = tan^{-1}\left(\dfrac{y}{2a\sin 15^\circ}\right)$，$\gamma = tan^{-1}\left(\dfrac{2a\sin 15^\circ}{y}\right) - tan^{-1}\left(\dfrac{a\sin 15^\circ}{y}\right)$ から、

$\delta = \beta + \gamma = tan^{-1}\left(\dfrac{y}{2a\sin 15^\circ}\right) + tan^{-1}\left(\dfrac{2a\sin 15^\circ}{y}\right) - tan^{-1}\left(\dfrac{a\sin 15^\circ}{y}\right)$ ここで、第１項と第２項に注目すると、$\theta > 0$ のとき、$tan^{-1}(\theta) + tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\theta}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ であるから、$\dfrac{y}{2a\sin 15^\circ} > 0$ より、，

$$tan^{-1}\left(\frac{y}{2a\sin 15^\circ}\right) + tan^{-1}\left(\frac{2a\sin 15^\circ}{y}\right) = \frac{\pi}{2}$$

従って、$\delta = \dfrac{\pi}{2} - tan^{-1}\left(\dfrac{a\sin 15^\circ}{y}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}$ となり前の結果と一致する。

図２において、直接 $cos(\alpha+\beta+\gamma)$ からその最大値を求めようとすると、

$cos(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\left[x^2 + \left(2a\sin 15^\circ\right)^2\right] + \left[\left(a\cos 15^\circ - x\right)^2 + \left(a\sin 15^\circ\right)^2\right] - a^2}{2\sqrt{x^2 + \left(2a\sin 15^\circ\right)^2}\sqrt{\left(a\cos 15^\circ - x\right)^2 + \left(a\sin 15^\circ\right)^2}}$ のように複雑な式になり、最大値を求めるのは難しい。

　１９９４年 予選第５問はなかなか面白い問題。求める角度を３つに分割して、それぞれのアークタンジェントから強引に最大値を求めたが、もっとずっとスマートな方法で解けるはずで、自分としては満足できる解答と思っていない。（２０２２．０４．２４）